COMPTE RENDU

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 10 MAI 1841.

PRÉSIDENCE DE M. SERRES.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. **Biot** commence la lecture de son *travail sur la polarisation lamellaire.* Il en expose les phénomènes fondamentaux devant l'Académie. Il continuera cette lecture dans la séance prochaine; et quand elle sera terminée il en donnera un résumé dans le *Compte rendu.*

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres; par* M. **Poinsot**.

I.

« 1. Je me propose de parcourir et de démontrer dans cet écrit les principales propositions qui servent de base à la théorie des nombres. Quoique les géomètres en aient déjà donné des démonstrations plus ou moins ingénieuses, je ne crois pas inutile d'en présenter encore de nouvelles, qui me paraissent à la fois plus simples et plus directes, ou qui, étant tirées d'un nouvel ordre de considérations, sont propres à jeter un nouveau jour sur les théorèmes.

» 2. Ces démonstrations pourraient entrer facilement dans nos ouvrages élémentaires, et par là contribuer, bien plus qu'on ne l'imagine, aux véritables progrès de la science. Car si la théorie des nombres est encore peu avancée, malgré les efforts des plus grands géomètres, ce n'est point uniquement à la difficulté propre de la matière qu'on doit attribuer la lenteur de ces progrès : elle tient peut-être encore plus à cette espèce d'isolement et d'abandon où l'on a laissé jusqu'ici cette première partie de nos études mathématiques. Il faut observer que la théorie des nombres est tout-à-fait négligée dans nos éléments, et que l'esprit ne s'y exerçant pas d'assez bonne heure, n'est peut-être plus capable de s'en rendre ensuite les principes assez familiers. Les anciens y donnaient plus de soin dans leurs ouvrages; on dirait qu'ils en avaient mieux senti l'importance, et leurs livres, à cet égard, ont encore de l'avantage sur les nôtres. Mais depuis long-temps il semble que les auteurs aient regardé la théorie des nombres comme une spéculation singulière, qui ne se lie à rien ni dans l'Analyse ni dans la Géométrie, et qui n'offre ainsi à l'esprit que des vérités plus curieuses qu'utiles. A peine en trouve-t-on quelques traces dans les traités ordinaires d'Arithmétique et d'Algèbre. Et cependant, pour peu qu'on y veuille réfléchir, il est aisé de voir que cette arithmétique transcendante est comme le principe et la source de l'algèbre proprement dite. C'est une vérité qu'on pourrait établir par le raisonnement, comme je le montrerai tout-à-l'heure, mais qu'on peut aussi prouver en quelque sorte par l'expérience. Car, observez que ce peu qu'on ajoute de temps à autre à l'algèbre vient du peu qu'on découvre par intervalles dans la science des propriétés des nombres. On en a surtout un bel exemple dans cet heureux rapprochement qui a fait connaître à M. Gauss la résolution algébrique des équations binomes de tous les degrés, et la nature des nombres premiers par lesquels on peut diviser régulièrement le cercle au moyen de la règle et du compas. C'est un pas inattendu et bien remarquable, que la théorie des nombres a fait faire à la fois à l'algèbre et à la géométrie. L'algèbre, à son tour, par ses signes, et la géométrie même par ses figures, peuvent s'appliquer aussi heureusement à la théorie des nombres, y faire éclore de nouvelles idées et de nouveaux théorèmes, indiquer de nouvelles routes dans la science, et nous apprendre enfin quelque chose sur l'art encore inconnu de nous y conduire. C'est ce que j'ai tâché de montrer d'une manière assez frappante, dans un Mémoire étendu où j'ai donné le premier essai de cette singulière application, et où l'on a vu les imaginaires mêmes servir à la représentation analytique de certains nombres dont la loi nous était entièrement inconnue.

» Ces rapprochements et quelques autres semblables, montrent assez la liaison de l'algèbre et de la théorie des nombres: mais, comme je l'ai dit plus haut, c'est ce qu'on peut voir aussi, indépendamment de ces exemples, et pour ainsi dire *à priori*, en s'élevant à l'idée qu'on doit se faire de la science mathématique considérée de la manière la plus générale. Cette réflexion mérite d'être développée.

II.

» 3. On définit ordinairement les mathématiques la science des *grandeurs* en général, ou la science des *quantités*, c'est-à-dire, au fond, la science des *rapports*; c'est la définition la plus générale qu'on ait donnée jusqu'ici du mot de mathématiques. Mais, quoique cette définition paraisse embrasser la science tout entière, il me semble qu'elle n'en donne encore une idée ni assez profonde ni assez étendue. Les mathématiques ne sont pas seulement la science des rapports, je veux dire que l'esprit n'y a pas uniquement en vue la *proportion* ou la *mesure*; il peut encore considérer le *nombre* en lui-même, l'*ordre* et la *situation* des choses, sans aucune idée de leurs rapports, ni des distances plus ou moins grandes qui les séparent. Si l'on parcourt les différentes parties des mathématiques, on y trouve partout ces deux objets de nos spéculations.

» 4. Ainsi l'arithmétique nous offre d'abord l'arithmétique ordinaire, qui n'est guère autre chose que l'art de la numération, et qui peut s'établir d'une infinité de manières, selon l'échelle ou la base que l'on veut choisir. Mais les nombres, considérés en eux-mêmes, ont des propriétés qui ne dépendent pas du tout de la manière dont on les représente, ou dont on opère actuellement sur eux. Ainsi il y a des nombres qui ne peuvent être divisés par aucun autre, et qu'on nomme *premiers*, ou *simples*, parce que tous les autres s'en *composent* par la multiplication; il y a les différentes *puissances* des nombres, qu'on produit en les multipliant plusieurs fois par eux-mêmes; et une foule d'autres formés par diverses lois, et par toutes les combinaisons régulières de celles-là. Or tous ces nombres et leurs propriétés demeurent toujours les mêmes dans tous les systèmes possibles de numération; et de là résulte un certain genre de spéculations et de vérités mathématiques, qui constituent cette arithmétique transcendante qu'on nomme aujourd'hui la *théorie des nombres*.

» 5. Si vous considérez l'algèbre, vous y voyez également deux parties très distinctes : et d'abord l'algèbre ordinaire, qu'on peut très bien nom-

mer l'*arithmétique universelle.* Cette algèbre, en effet, n'est autre chose qu'une arithmétique généralisée, c'est-à-dire étendue des nombres particuliers à des nombres quelconques, et, par conséquent, des opérations actuelles qu'on exécutait à des opérations qu'on ne fait plus qu'indiquer par des signes, de manière que, dans cette première spéculation de l'esprit, on songe moins à obtenir le résultat de ces opérations successives qu'à en tracer le tableau, et à découvrir ainsi des formules générales pour la solution de tous les problèmes du même genre. Mais il y a une algèbre supérieure, qui repose tout entière sur la théorie de l'ordre et des combinaisons, qui s'occupe de la nature et de la composition des formules considérées en elles-mêmes, comme de purs symboles, et sans aucune idée de valeur ou de quantité. C'est à cette partie qu'on doit rapporter la théorie profonde des équations, celle des expressions imaginaires, et tout l'art des transformations algébriques; et c'est même cette seule partie élevée de la science qui mérite à proprement parler le nom d'*algèbre.*

» 6. Si l'on passe maintenant à la *géométrie,* qu'on définit la science de l'étendue figurée, on y voit d'abord la géométrie ordinaire, qui étudie les propriétés des figures sous le seul point de vue des rapports de grandeur, et qui n'a ainsi d'autre objet que la proportion ou la mesure. Mais on distingue ensuite une autre géométrie, qui ne regarde, pour ainsi dire, que les lieux dans l'espace, c'est-à-dire l'ordre et la situation des choses, sans aucune considération de leur grandeur ou de leur figure. C'est une science encore neuve, que *Leibnitz* paraît avoir le premier entrevue, et qu'il a nommée la *géométrie de situation.* Il en avait pris l'idée dans la considération de quelques jeux remarquables, dont la loi ne dépend que de la situation des différentes pièces qu'on y emploie; mais elle s'étend à beaucoup d'autres questions importantes, et c'est à cette géométrie que j'ai cru devoir rapporter les *polygones* et les *polyèdres étoilés,* et plusieurs problèmes d'ordre et de situation que j'ai proposés et résolus pour la première fois dans un Mémoire qui a été imprimé dans le *Recueil de l'Institut* et dans le *Journal de l'Ecole Polytechnique.*

» La mécanique elle-même nous présenterait également deux espèces de mécanique. Et d'abord celle qui calcule la quantité des mouvements, les forces, les vitesses; ensuite celle qui n'a en vue que la disposition des corps, leur jeu réciproque, la manière dont ils croisent leurs routes, et cela sans avoir égard ni à la direction de ces lignes, ni au temps que les corps mettent à les décrire, ni aux forces qui sont nécessaires pour les mouvoir. Telles sont plusieurs machines ou mécaniques ingénieuses, où

l'on ne considère ni la force, ni la grandeur du mouvement, mais uniquement la situation et le mouvement géométrique des différentes pièces qui les composent. Mais il est clair que cette espèce de mécanique serait toute fondée sur la géométrie de situation, et se confondrait, pour ainsi dire, avec elle.

» **7**. Quoi qu'il en soit, vous voyez que les mathématiques nous offrent partout ces deux objets de spéculation : d'un côté, la *grandeur* ou la *quantité,* c'est-à-dire la *proportion* ou la *mesure* des grandeurs; de l'autre, le *nombre,* l'*ordre* et la *situation* des choses, sans aucune idée de mesure ou de quantité. De sorte que les mathématiques, considérées de la manière la plus générale, pourraient être définies : la science qui a pour objet le *nombre,* l'*ordre* et la *mesure*.

» **8**. Je mets la théorie des nombres en premier lieu, parce qu'elle est nécessairement la première qui doive s'offrir dans la chaîne naturelle de nos idées, et que la science des rapports y a elle-même ses premiers principes. Et en effet, il n'est guère de problème mathématique, quelque simple qu'il soit, qui ne présente *plusieurs* choses à considérer, et qui n'ait ainsi de premières difficultés relatives au *nombre* de ces choses; de sorte que les premiers principes de la solution doivent être nécessairement puisés dans la théorie des nombres.

» **9**. Cependant cette spéculation, que je mets la première dans la suite de nos idées, paraît ne s'être présentée que la seconde; et même on a vu les diverses branches des mathématiques s'élever à une assez grande hauteur, sans rien emprunter à la théorie des nombres, qui est restée, pour ainsi dire, isolée, et comme sans usage dans l'analyse et la géométrie. Mais il y a là-dessus une remarque essentielle à faire.

» **10**. Il faut observer que la plupart des questions traitées jusqu'ici par les géomètres ont exigé, si j'ose le dire, encore plus d'adresse et de sagacité que de force et de profondeur. N'ayant presque jamais en vue que la *quantité,* ils ont pu la saisir, et même la suivre jusque dans les affections des grandeurs qui varient par nuances insensibles. Dans les premiers problèmes qui nous intéressent, il y a si peu d'éléments à considérer, que les difficultés qui tiennent au nombre et à l'ordre de ces éléments disparaissent pour ainsi dire d'elles-mêmes, et ne peuvent guère retarder la solution qu'on se propose d'obtenir. Mais sitôt qu'on a voulu résoudre des questions un peu moins simples, ces difficultés se sont fait sentir, et nous ont paru insurmontables. Dans ces sortes de recherches, on a à peine effleuré la matière; et les solutions particulières, qu'on avait obtenues dans quel-

ques cas simples, n'étant pas tirées des principes généraux, n'ont pu donner aucune lumière sur les questions du même genre. C'est ce qu'on peut voir et rendre sensible par plusieurs exemples, et, entre autres, par cet exemple remarquable que j'ai cité plus haut. Ainsi les anciens ont trouvé qu'on pouvait construire, par la règle et le compas, le côté du *triangle* équilatéral, et même le côté du *pentagone* régulier, inscrits à un cercle donné; et, quoiqu'ils aient trouvé dans ces deux cas des constructions exactes, ils n'ont rien vu au-delà, et ils ont même cru qu'on ne pouvait aller plus loin. Ils ont pu résoudre le problème pour ces deux nombres premiers 3 et 5, parce que la difficulté qui vient des nombres est ici presque nulle, et n'est pas même aperçue. Mais il n'en est pas de même pour les nombres premiers supérieurs, et ils ont été arrêtés tout-à-coup dans leur recherche, parce que les vrais principes de la solution, qui ne peuvent être pris que dans la théorie des nombres, leur ont entièrement échappé. Et en effet, s'ils avaient eu ces principes, ils auraient vu que la possibilité de diviser géométriquement le cercle en 3 ou 5 parties égales tient essentiellement à une propriété qui est commune à ces deux nombres premiers, et qui consiste en ce que chacun d'eux, étant diminué de l'unité, fait une puissance exacte de 2; et de là ils auraient conclu que la solution est également possible pour les autres nombres premiers, tels que 17, 257, etc., qui jouissent aussi de la même propriété; mais c'est ce que leur solution, trouvée dans le cas de 3 et 5, ne leur avait pas même fait soupçonner, parce ce n'était, pour ainsi dire, qu'une solution de fait, et qui ne venait pas de cette propriété des nombres, qui seule la fait réussir.

» **11.** Il résulte donc de ces réflexions que la théorie des nombres, qui, au premier coup d'œil, ne paraît qu'une spéculation singulière en mathématiques, s'y présente au contraire d'une manière naturelle, et qu'elle forme même la première partie essentielle de la doctrine, comme étant celle où la science générale des rapports a elle-même ses premiers fondements. C'est par cette théorie de l'ordre et des nombres qu'on peut connaître la nature propre de l'algèbre, et rendre raison de cette *équivoque,* ou multiplicité de sens, qu'elle attache à ses signes, et qui nous présente souvent plusieurs racines ou solutions différentes dans un problème où notre esprit n'en voit qu'une seule: propriété singulière de l'algèbre, dont on ne s'est point encore bien rendu compte, et que je vais tâcher d'approfondir afin de jeter un nouveau jour sur la philosophie de la science.

III.

» **12**. Quand on applique l'algèbre à la solution d'un problème, on trouve souvent une équation de degré supérieur, qui a plusieurs racines, et qui donne ainsi, outre la valeur propre à résoudre le problème tel que l'esprit le considère, d'autres valeurs auxquelles on n'avait pas songé, et qu'il paraît quelquefois impossible d'interpréter par les nombres ou par les lignes dont il s'agit dans la question proposée.

» **13**. D'Alembert a fait à ce sujet des réflexions dans plusieurs de ses écrits, et notamment dans le dictionnaire de l'Encyclopédie, au mot *équation*. Il parcourt quelques questions très simples, où l'algèbre donne à la fois plusieurs solutions différentes, quoique le problème paraisse n'en avoir qu'une seule dans le sens précis de son énoncé; et il tâche d'expliquer cette multiplicité, en faisant voir que l'équation est souvent plus générale que l'énoncé, et qu'elle est la traduction algébrique de plusieurs énoncés différents dont l'algèbre ne peut exprimer la différence. « Quelques algébristes,
» dit-il, regardent cette généralité comme une richesse de l'algèbre, qui
» répond, non-seulement à ce qu'on lui demande, mais encore à ce qu'on
» ne lui demandait pas et qu'on ne songeait pas à lui demander... Pour moi,
» ajoute d'Alembert, je ne puis m'empêcher d'avouer que cette richesse
» prétendue me paraît un inconvénient. Souvent il en résulte qu'une équa-
» tion monte à un degré beaucoup plus haut qu'elle ne monterait, si elle
» ne renfermait que les racines propres à la vraie solution de la question
» telle qu'elle est proposée. Il est vrai que cet inconvénient serait moindre,
» et serait même, en un sens, une véritable richesse, si l'on avait une mé-
» thode générale pour résoudre les équations de tous les degrés. Il ne s'agi-
» rait plus que de démêler parmi les racines celles dont on aurait vraiment
» besoin : mais malheureusement on se trouve arrêté dès le quatrième degré.
» Il serait donc à souhaiter, puisqu'on ne peut résoudre toute équation,
» qu'on pût au moins l'abaisser au degré de la question, c'est-à-dire à
» n'avoir qu'autant d'unités dans l'exposant de son degré, que la question
» a de solutions vraies et directes; mais la nature de l'algèbre ne paraît pas
» le permettre. »

» **14**. Telles sont à ce sujet les réflexions de d'Alembert, philosophe à qui l'on doit sans doute beaucoup de lumières sur d'autres points de la science ; mais il me semble qu'ici ses réflexions manquent à la fois de force et de justesse, et qu'elles ne vont point au fond de la question philosophique

dont il s'agit. Cette généralité de l'algèbre n'est ni une *richesse,* ni un *inconvénient :* c'est le simple caractère d'une science exacte et parfaite ; car l'algèbre ne nous donne exactement que ce qu'un raisonnement parfait nous aurait donné lui-même.

» **15.** Supposons, en effet, que le problème dont on s'occupe soit énoncé d'une manière parfaite : l'énoncé ne renfermera que la relation précise qui existe entre l'inconnue et les données du problème, et qui seule forme entre elles une *équation.* Il est clair que tout ce qu'on pourrait ajouter à cet énoncé, ou y sous-entendre, serait au moins inutile, et quelquefois même pourrait être une contradiction. Car, puisque l'inconnue se trouve déjà *fixée* par cette seule partie de l'énoncé qui forme l'équation, il est évident qu'on n'est plus le maître de rien ajouter ; comme, par exemple, cette condition que l'inconnue sera plus grande ou plus petite qu'une certaine quantité, ou que la ligne cherchée tombera dans telle ou telle partie de la figure, etc. ; conditions qui ne dépendent plus de nous, que l'esprit peut supposer mal à propos, et qui souvent n'ont pas lieu dans la question proposée. On voit donc que si l'énoncé du problème est parfait, il n'est rien autre chose que l'équation même qui le traduit en algèbre. Si donc cette équation nous présente plusieurs racines ou valeurs différentes de l'inconnue, l'énoncé lui-même doit également présenter, à l'esprit attentif, cette même multiplicité de solutions dans le problème dont il s'agit.

» L'algèbre ne donne donc rien au-delà de ce qu'on lui demande ; elle n'est pas plus générale que la logique considérée dans sa perfection, et le degré où l'équation s'élève est le degré même de la question, si elle est parfaitement posée.

» **16.** Mais le plus souvent nos énoncés sont très imparfaits ; je veux dire, qu'indépendamment de cette relation qui lie aux données l'inconnue et qui la *détermine,* notre esprit y mêle encore certaines conditions inutiles et souvent contradictoires ; et voici alors ce qui nous arrive. Comme ces sortes de restrictions ne donnent point d'équation, et ne sont pas ainsi de nature à s'écrire en algèbre, l'équation qu'on tire de l'énoncé se trouve exactement la même que si ces suppositions n'avaient point lieu, et, par conséquent, cette équation a les mêmes racines ou solutions différentes dont le problème est susceptible en le supposant bien exprimé. Cependant, comme notre esprit reste toujours préoccupé par la considération particulière de ces limites où il borne la question, il s'étonne d'abord de cette multiplicité de solutions qu'il n'avait point en vue, et il cherche ensuite à les interpréter par les lignes, ou par les quantités dont il s'agit dans la question proposée. S'il

en vient à bout, il attribue à l'algèbre, qui lui a donné ces solutions inattendues, une généralité propre qu'il n'avait pas trouvée dans le raisonnement ordinaire; s'il ne peut expliquer toutes ces valeurs, il reproche à l'algèbre cette trop grande généralité, comme un inconvénient et une imperfection qui mêle la vraie valeur de l'inconnue à des valeurs étrangères. Mais on voit qu'il n'y a ici d'autre imperfection que celle de l'esprit et du langage. L'algèbre, encore une fois, ne traduit et ne doit traduire, de l'énoncé du problème, que la seule partie qui fait une *équation* et qui suffit pour *déterminer* l'inconnue. Elle abandonne tout le reste, comme ces rapports vagues de *majorité* ou de *minorité* qui ne peuvent servir à aucune *détermination*. Ainsi l'équation obtenue ne renferme rien des imperfections de notre énoncé, et elle devient la question même parfaitement posée. La multiplicité de ces racines nous avertit donc, non pas, comme on le croit d'ordinaire, qu'il faut *étendre* le premier énoncé pour en multiplier les *divers sens;* mais qu'il faut, au contraire, le simplifier et le *réduire,* en y supprimant ce qu'on y avait mis de trop et qu'on n'était pas le maître de supposer. Et alors on peut voir qu'il n'y a précisément, dans l'équation algébrique, que la même multiplicité de solutions qu'on aurait pu reconnaître, sans algèbre, dans l'énoncé parfait du problème.

» **17.** Telle est, je crois, la vraie nature de l'algèbre, et la vraie solution de la question philosophique que j'examine, et qui touche aux premiers fondements de la science mathématique. Il ne s'agit pas de savoir s'il y a, ou non, une méthode générale pour résoudre les équations de tous les degrés : on n'en sait pas moins qu'une équation de degré supérieur a plusieurs racines, et la question était d'expliquer cette multiplicité, en montrant qu'elle est dans la nature même des choses, et que l'algèbre n'a pas plus de généralité qu'un bon raisonnement.

» Mais il ne faut pas manquer de rappeler ici cette observation essentielle : c'est que, à raison de l'ignorance et de la faiblesse de l'esprit humain, qui ne marche guère qu'à l'aide des images sensibles, ou des mots qui eux-mêmes ne répondent presque tous qu'à des images, l'algèbre nous a été et nous est encore d'un merveilleux secours. Car, comme elle n'exprime que les rapports qui *déterminent*, et qu'elle n'a point de signes pour les conditions vagues, il en résulte que, quelque imparfaits que soient nos énoncés, pourvu qu'ils renferment la loi de rapport qui fait le nœud du problème, l'équation que l'analyse en tire se trouve aussi parfaite que si elle provenait de l'énoncé le plus parfait; et, sous ce point de vue, on peut dire que l'algèbre a étendu et perfectionné l'esprit humain.

» **18**. On voit donc que ce qu'il y aurait à faire aujourd'hui pour achever la doctrine, ce serait de chercher et de montrer dans chaque problème comment l'esprit, à l'aide du seul raisonnement, aurait pu s'élever à cette généralité de vue dont il n'a été averti que par les signes de l'algèbre, et comment il aurait dû prévoir ces multiples solutions qui coexistent dans un même problème, dont il est impossible de trouver l'une sans trouver à la fois toutes les autres, et qu'aucun art analytique ne peut jamais séparer. C'est par cette étude attentive qu'il verra ce qui avait manqué jusqu'ici aux principes de son analyse logique. Il n'avait songé qu'aux rapports de grandeur, et il reconnaîtra qu'il fallait avant tout considérer le nombre et l'ordre des choses, indépendamment de toute idée de grandeur ou de quantité. Dans cette pure considération de l'ordre, où il verra que plusieurs ordres qui lui paraissent différents peuvent naître l'un de l'autre par une seule et même loi, et se reproduire sans cesse, quel que soit le premier ordre d'où l'on veuille partir, il trouvera l'origine naturelle des *puissances*, et la raison profonde de ces *multiples racines* de l'unité, qui ne sont point des *valeurs*, mais de simples *signes d'ordre* entre les choses que l'on considère. Par ces nouveaux principes il perfectionnera l'algèbre elle-même, et l'algèbre à son tour réfléchira de nouvelles lumières sur la théorie des nombres.

» De toutes ces réflexions, et d'une foule d'autres que j'y pourrais ajouter, je conclus donc que les principes de l'algèbre et de la théorie des nombres devraient être unis ensemble dans nos ouvrages élémentaires, comme ils sont inséparables par la nature même de ces deux sciences. Ainsi j'espère qu'on me pardonnera, et même qu'on me saura quelque gré, de revenir sur ces principes fondamentaux, d'essayer de les rendre plus clairs et plus sensibles, et de faciliter ainsi aux jeunes géomètres une étude très ardue, et en apparence très stérile, mais en effet très féconde, et peut-être, comme je l'ai dit, la seule d'où l'analyse mathématique puisse attendre aujourd'hui de véritables découvertes. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur diverses formules relatives à l'algèbre et à la théorie des nombres; par* M. **Augustin Cauchy.** (Suite.)

§ II. *Sur la résolution des équations indéterminées du premier degré en nombres entiers.*

« Supposons qu'il s'agisse de résoudre, en nombres entiers, une équation indéterminée du premier degré à plusieurs inconnues. Si ces inconnues se réduisent à deux

$$x, y,$$

l'équation indéterminée sera de la forme

$$(1) \qquad ax + by = k,$$

a, b, k désignant trois quantités entières, et ne pourra être résolue que dans le cas où le plus grand commun diviseur de a et de b divisera k. Mais alors on pourra diviser les deux membres de l'équation (1) par ce plus grand commun diviseur; et, comme on pourra, en outre, si a est négatif, changer les signes de tous les termes, il est clair que l'équation (1) pourra être réduite à la forme

$$(2) \qquad mx \pm ny = \pm l,$$

l, m, n désignant trois nombres entiers, et m, n étant premiers entre eux.

» Observons maintenant que l'équation (2) coïncide avec l'équivalence

$$mx \equiv \pm l, \text{ (mod. } n),$$

ou

$$(3) \qquad x \equiv \pm \frac{l}{m}, \text{ (mod. } n),$$

et qu'en vertu de la formule

$$\frac{l}{m} \equiv l \times \frac{1}{m}, \text{ (mod. } n),$$

la résolution de l'équivalence (3) peut être réduite à celle de la suivante

$$(4) \qquad x \equiv \frac{1}{m}, \text{ (mod. } n),$$

» D'autre part, si n est un nombre premier, on aura, d'après un théorème connu de Fermat,

$$(5) \qquad m^{n-1} \equiv 1, \text{ (mod. } n\text{)},$$

par conséquent

$$\frac{1}{m} \equiv m^{n-2}, \text{ (mod. } n\text{)}.$$

Donc alors m^{n-2} sera une des valeurs de x propres à vérifier l'équivalence (4); de sorte qu'on résoudra cette équivalence en posant

$$(6) \qquad n \equiv m^{n-2}, \text{ (mod. } n\text{)}.$$

Telle est la conclusion très simple à laquelle M. Libri et M. Binet sont parvenus pour le cas où le module n est un nombre premier. Pour étendre cette même solution à tous les cas possibles, il suffirait de substituer au théorème de Fermat le théorème d'Euler suivant lequel, n étant un module quelconque, et m un entier premier à n, on aura généralement

$$(7) \qquad m^{\mathrm{N}} \equiv 1, \text{ (mod. } n\text{)},$$

si l'exposant N renferme autant d'unités qu'il y a de nombres entiers inférieurs à n et premiers à n (*). En effet, l'équation (7) étant admise, on en conclura

$$\frac{1}{m} \equiv m^{\mathrm{N}-1}, \text{ (mod. } n\text{)};$$

(*) M. Poinsot nous a dit avoir remis autrefois à M. Legendre une Note manuscrite dans laquelle il avait ainsi étendu à des modules quelconques la solution présentée par M. Binet, et relative au cas où N est un nombre premier. Dan cette même Note, M. Poinsot donnait du théorème d'Euler la démonstration suivante, analogue à celle qui, dans le Mémoire de M. Binet, se trouve appliquée au théorème de Fermat.

Soient

$$1, \; a, \; b, \; c, \ldots$$

la suite des entiers inférieurs à n, mais premiers à n; N le nombre de ces entiers, et m l'un quelconque d'entre eux. La suite

$$m, \; am, \; bm, \; cm, \ldots$$

et, par conséquent,

$$m^{N-1}$$

sera l'une des valeurs de x propres à vérifier l'équivalence (4), de sorte qu'on résoudra cette équivalence en prenant

$$(8) \qquad x \equiv m^{N-1}, \text{ (mod. } n).$$

» L'équivalence (4), étant résolue comme on vient de le dire, entraînera la résolution de l'équivalence (3) qui coïncide avec l'équation (2), et par suite, la résolution de l'équation (1), dans le cas où le plus grand commun diviseur de a et de b divisera k. On résoudra, en particulier, l'équivalence (3) en prenant

$$(9) \qquad x \equiv \pm m^{N-1} l, \text{ (mod. } n).$$

» En résumé, l'on pourra énoncer la proposition suivante.

» 1[er] *Théorème.* a, b, k désignant trois quantités entières, on pourra résoudre en nombres entiers l'équation indéterminée

$$(1) \qquad ax + by = k,$$

si le plus grand commun diviseur de a et de b divise k. Supposons d'ailleurs qu'en divisant a, b, c par ce plus grand commun diviseur, et changeant s'il est nécessaire les signes de tous les termes de l'équation ainsi obtenue, on la réduise à la suivante

$$(2) \qquad mx \pm ny = \pm l,$$

---

se composera encore de termes, premiers à n, mais qui, divisés par n, donneront des restes différents. Donc chaque terme de la seconde suite sera équivalent, suivant le module n, à un seul terme de la première, et l'on aura

$$1.a.b.c\ldots \equiv m.am.bm.cm\ldots \equiv 1.a.b.c\ldots m^N, \text{ (mod. } n),$$

ou, ce qui revient au même,

$$1.a.b.c\ldots (m^N - 1) \equiv 0, \quad \text{(mod. } n),$$

puis on en conclura

$$m^N - 1 \equiv 0, \text{ ou } m^N \equiv 1, \text{ (mod. } n).$$

ou, ce qui revient au même, à l'équivalence

$$(3) \qquad n = \pm \frac{l}{m}, \text{(mod. } n\text{)},$$

l, m, n désignant trois nombres entiers, et m, n étant premiers entre eux. Pour vérifier l'équivalence (3), il suffira de poser

$$x \equiv \pm m^{\mathrm{N}-1} l, \text{(mod. } n\text{)},$$

N désignant le nombre des entiers inférieurs à n, mais premiers à n.

» *Corollaire* 1[er]. L'équation indéterminée

$$ax + by = k$$

est toujours résoluble en nombres entiers, non-seulement lorsque les coefficients a, b des deux inconnues sont premiers entre eux, mais aussi lorsque la valeur numérique du terme tout connu k est égale au plus grand commun diviseur de a, b, ou divisible par ce plus grand commun diviseur. Par suite le plus grand commun diviseur de deux quantités entières a, b peut toujours être présenté sous la forme

$$ax + by,$$

x, y désignant encore des quantités entières.

» *Corollaire* 2[e]. l, m, n désignant trois nombres entiers, et m, n étant premiers entre eux, on peut toujours satisfaire par des valeurs entières de x, y, à l'équation

$$mx - ny = \pm l.$$

D'ailleurs les diverses valeurs de x propres à vérifier cette équation, ou, ce qui revient au même, l'équivalence

$$x \equiv \pm \frac{l}{m}, \text{(mod. } n\text{)},$$

sont toutes équivalentes entre elles suivant ce module n; en sorte que, l'une d'elles étant désignée par ξ, on aura généralement

$$x = \xi + nz,$$

z désignant une quantité entière positive ou négative.

» On déduit aisément du premier théorème celui que nous allons énoncer.

» 2° *Théorème.* Soient

$$n = n_{\prime} n_{\prime\prime}$$

un module décomposable en deux facteurs $n_{\prime}$, $n_{\prime\prime}$, premiers entre eux; r l'un quelconque des entiers inférieurs à n, mais premiers à n; et

$$r_{\prime},\ r_{\prime\prime}$$

les restes qu'on obtient, quand on divise r par le premier ou le second des deux facteurs

$$n_{\prime},\ n_{\prime\prime}.$$

Non-seulement à chaque valeur de r correspondra un seul système de valeurs de $r_{\prime}$, $r_{\prime\prime}$; mais réciproquement à chaque système de valeurs de $r_{\prime}$, $r_{\prime\prime}$, correspondra une seule valeur de r.

» *Démonstration.* D'abord $r_{\prime}$ étant le reste de la division de r par n, sera complétement déterminé quand on connaîtra r, et l'on pourra en dire autant de $r_{\prime\prime}$. De plus, à deux valeurs données de

$$r_{\prime},\ r_{\prime\prime},$$

correspondra une valeur de r qui devra être de chacune des formes

$$r_{\prime} + n_{\prime} x, \quad r_{\prime\prime} + n_{\prime\prime} y,$$

x, y désignant deux quantités entières. Or les deux équations

$$r = r_{\prime} + n_{\prime} x, \quad r = r_{\prime\prime} + n_{\prime\prime} y,$$

entraîneront la formule

$$r_{\prime} + n_{\prime} x = r_{\prime\prime} + n_{\prime\prime} y,$$

ou

$$n_{\prime} x - n_{\prime\prime} y = r_{\prime\prime} - r_{\prime};$$

et les valeurs de x, propres à vérifier cette formule, seront de la forme

$$\xi + n_{\prime\prime} z,$$

ξ désignant l'une quelconque de ces mêmes valeurs, et z une quantité en-

tière positive ou négative. Cela posé, si l'on fait, pour abréger,

$$r_{\prime} + n_{\prime}\xi = \mathfrak{R},$$

l'équation

$$r = r_{\prime} + n_{\prime}x$$

donnera

$$r = \mathfrak{R} + n_{\prime}n_{\prime\prime}z,$$

ou, ce qui revient au même,

$$r = \mathfrak{R} + nz.$$

Or, puisque les diverses valeurs de r que déterminerait cette dernière équation, si la quantité entière z restait arbitraire, sont équivalentes entre elles suivant le module n, il est clair qu'une seule sera positive et inférieure à n. Donc à des valeurs données de $r_{\prime}$, $r_{\prime\prime}$, correspondra une seule valeur de r, positive et inférieure à n. Si l'on étend le théorème 2 au cas où le module n est décomposable en plus de deux facteurs, on obtiendra la proposition suivante.

» 3e *Théorème.* Soient

$$n = n_{\prime}n_{\prime\prime}n_{\prime\prime\prime}\ldots$$

un module décomposable en plusieurs facteurs

$$n_{\prime},\quad n_{\prime\prime},\quad n_{\prime\prime\prime},\ldots,$$

qui soient tous premiers entre eux; r l'un quelconque des entiers inférieurs à n; et

$$r_{\prime},\quad r_{\prime\prime},\quad r_{\prime\prime\prime},\ldots$$

les restes qu'on obtient quand on divise r par l'un des facteurs

$$n_{\prime},\quad n_{\prime\prime},\quad n_{\prime\prime\prime},\ldots$$

Non-seulement à chaque valeur de r correspondra un seul système de valeurs de $r_{\prime}$, $r_{\prime\prime}$, $r_{\prime\prime\prime}$, ...; mais réciproquement, à chaque système de valeurs de $r_{\prime}$, $r_{\prime\prime}$, r''',..., correspondra une seule valeur de r.

» *Démonstration.* En raisonnant comme dans le cas où les facteurs $n_{\prime}$, $n_{\prime\prime}$,... se réduisent à deux, on prouvera d'abord qu'à chaque valeur de r

répond un seul système de valeurs de $r_{,}$, $r_{,,}$, $r_{,,,}$,... Soient d'ailleurs

$$n'$$

le produit des facteurs de n différents de $n_{,}$, en sorte qu'on ait

$$n' = \frac{n}{n_{,}} = n_{,,} n_{,,,}, \ldots,$$

et nommons r' le reste de la division de r par n'. En vertu du théorème 1[er], si les facteurs $n_{,}$, $n_{,,}$, $n_{,,,}$ se réduisent à trois, on verra correspondre une seule valeur de r' à chaque système de valeurs de $r_{,,}$, $r_{,,,}$, et une seule valeur de r à chaque système de valeurs de $r_{,}$, r', par conséquent à chaque système de valeurs de $r_{,}$, $r_{,,}$, $r_{,,,}$. Ainsi l'on passe facilement du cas où le nombre des facteurs de n est 2, au cas où ce nombre devient égal à 3. On passera de la même manière du cas où il existe trois facteurs de n premiers entre eux, au cas où il en existe quatre, et ainsi de suite. Donc le troisième théorème est généralement exact, quel que soit le nombre des facteurs premiers de n.

» *Corollaire*. Le module

$$n = n_{,} n_{,,} n_{,,,} \ldots,$$

étant décomposable en facteurs

$$n_{,}, \quad n_{,,}, \quad n_{,,,}, \ldots,$$

qui soient premiers entre eux, nommons toujours

r, l'un quelconque des entiers inférieurs à n, mais premiers à n;
$r_{,}$, l'un quelconque des entiers inférieurs à $n_{,}$, mais premiers à $n_{,}$;
$r_{,,}$, l'un quelconque des entiers inférieurs à $n_{,,}$, mais premiers à $n_{,,}$,
etc.;

et soient en outre

N, le nombre des valeurs de r;
$N_{,}$, le nombre des valeurs de $r_{,}$;
$N_{,,}$, le nombre des valeurs de $r_{,,}$,
etc. ....

Les systèmes de valeurs que l'on pourra former en combinant une valeur de $r_{,}$ avec une valeur de $r_{,,}$, avec une valeur de $r_{,,,}$, ..., seront évidemment en nombre égal au produit

$$N_{,}N_{,,}N_{,,,}\ldots.$$

Donc, puisqu'à chacun de ces systèmes correspond une seule valeur de r, et réciproquement, on aura

$$N = N_{,}N_{,,}N_{,,,}\ldots$$

» Il sera facile maintenant de résoudre la question que nous allons énoncer.

» 1er *Problème.* Déterminer le nombre N des entiers inférieurs à un module donné n, et premiers à ce module.

» *Solution.* Pour résoudre aisément ce problème, il sera bon de considérer successivement les divers cas qui peuvent se présenter, suivant que le module n est un nombre premier, ou une puissance d'un nombre premier, ou un nombre composé quelconque.

» Or, 1° si le module n est un nombre premier, alors les entiers

$$1,\quad 2,\quad 3,\ldots\ldots,n-1,\quad n,$$

non supérieurs au module n, étant tous, à l'exception de n, premiers à ce module, on aura évidemment

$$(10)\qquad N = n - 1.$$

Alors aussi, la solution que fournira le 1er théorème pour une équation indéterminée, ne différera pas de la solution donnée par M. Libri et par M. Binet.

» 2°. Si le module

$$n = \nu^{a}$$

se réduit à une certaine puissance d'un nombre premier ν, alors parmi les entiers

$$1,\quad 2,\quad 3,\ldots,\quad n-1,\ n,$$

dont le nombre est n, les uns, divisibles par ν, seront le produit de ν par les entiers

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \frac{n}{\nu},$$

dont le nombre est $\frac{n}{\nu}$; les autres, premiers à ν, ou, ce qui revient au même, à n, seront évidemment en nombre égal à la différence

$$n - \frac{n}{\nu} = n\left(1 - \frac{1}{\nu}\right).$$

On aura donc

$$(11) \qquad N = n\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) = \nu^{a-1}(\nu - 1).$$

» 3°. Si le module n est un nombre entier quelconque, on pourra toujours le décomposer en facteurs dont chacun se réduise à un nombre premier ou à une puissance d'un nombre premier. Nommons

$$n_{,}, \; n_{,,}, \; n_{,,,}, \; \ldots$$

ces mêmes facteurs, en sorte qu'on ait

$$n = n_{,} n_{,,} n_{,,,}$$

et

$$n_{,} = \nu_{,}^{a}, \quad n_{,,} = \nu_{,,}^{b}, \quad n_{,,,} = \nu_{,,,}^{c}, \ldots,$$

$\nu_{,}, \nu_{,,}, \nu_{,,,}, \ldots$ désignant des nombres premiers distincts les uns des autres. Représentons d'ailleurs

par $N_{,}$ le nombre des entiers inférieurs et premiers à $n_{,}$;
par $N_{,,}$ le nombre des entiers inférieurs et premiers à $n_{,,}$;
par $N_{,,,}$ le nombre des entiers inférieurs et premiers à $n_{,,,}$,
etc.

Le corollaire du 3e théorème donnera

$$(12) \qquad N = N_{,} N_{,,} N_{,,,} \ldots,$$

puis on en conclura, eu égard à la formule (11),

$$(13) \qquad N = n\left(1 - \frac{1}{\nu_{,}}\right)\left(1 - \frac{1}{\nu_{,,}}\right)\left(1 - \frac{1}{\nu_{,,,}}\right)\ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(14) \qquad N = \nu_{,}^{a-1} \nu_{,,}^{b-1} \nu_{,,,}^{c-1} \ldots (\nu_{,} - 1)(\nu_{,,} - 1)(\nu_{,,,} - 1)\ldots$$

» *Corollaire.* Lorsque le module n se réduit au nombre 2, ou plus généralement à une puissance 2^a de ce même nombre, la valeur de N, en vertu de la formule (10), ou (11), se réduit à l'unité ou plus généralement à 2^{a-1}, en sorte qu'on a

$$\mathrm{N} = 2^{a-1} = \tfrac{1}{2}n.$$

» Revenons maintenant au premier théorème. On peut évidemment, dans ce théorème et dans les formules (8), (9), remplacer le nombre N des entiers inférieurs au module n, mais premiers à n, par l'une quelconque des valeurs de i pour lesquelles se vérifie l'équivalence

$$(15) \qquad m^i \equiv 1, \; (\mathrm{mod.}\ n).$$

Or parmi ces valeurs il en existe une, inférieure à toutes les autres, et qui pour ce motif doit être employée de préférence. D'ailleurs cette valeur particulière de i jouit de propriétés remarquables qui peuvent servir à la faire reconnaître et calculer. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

» Les nombres entiers m, n étant supposés premiers entre eux, l'unité sera certainement, dans la progression géométrique

$$1, \; m, \; m^2, \; m^3, \ldots,$$

le premier terme qui se trouve équivalent, selon le module n, à l'un des termes suivants. En effet, une équivalence de la forme

$$m^l \equiv m^{l+i}, \; (\mathrm{mod.}\ n),$$

dans laquelle l et i seraient entiers et positifs, entraînera nécessairement une autre équivalence de la forme

$$1 \equiv m^i, \; (\mathrm{mod.}\ n),$$

dans laquelle le terme m^l de la progression se trouverait remplacé par l'unité. Ajoutons que, si m^i représente la moins élevée des puissances entières et positives de m, équivalentes à l'unité suivant le module n, le reste que l'on obtiendra en divisant par n les termes de la progression

$$1, \; m, \; m^2, \; m^3, \ldots,$$

formeront une suite périodique, dans laquelle les i premiers termes seront

différents les uns des autres. Représentons par

$$1,\ m',\ m'',\ \ldots,\ m^{(i-1)}$$

ces premiers termes. Comme, dans la progression dont il s'agit, deux termes seront équivalents entre eux suivant le module n quand ils répondront à des exposants de la *base* m équivalents entre eux suivant le module i, on aura évidemment

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{lllll} m^0 & \equiv m^i & \equiv m^{2i} & \equiv \ldots & \equiv 1, \\ m^1 & \equiv m^{i+1} & \equiv m^{2i+1} & \equiv \ldots & \equiv m', \\ m^2 & \equiv m^{i+2} & \equiv m^{2i+2} & \equiv \ldots & \equiv m'', \\ \text{etc.}, & & & & \\ m^{i-1} & \equiv m^{2i-1} & \equiv m^{3i-1} & \equiv \ldots & \equiv m^{(i-1)}. \end{array}\right\} (\text{mod. } n).$$

L'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la base m pour obtenir un nombre équivalent suivant le module n à un reste donné, est ce qu'on nomme l'*indice* de ce nombre ou de ce reste. Cela posé, il est clair que, dans les formules (16), les indices correspondants au reste 1 seront représentés par les exposants

$$0,\ i,\ 2i,\ \ldots,$$

les indices correspondants au reste m' par les exposants

$$1,\quad i+1,\quad 2i+1,\ \ldots,$$

les indices correspondants au reste m'' par les exposants

$$2,\quad i+2,\quad 2i+2,\ \ldots,$$

etc...., enfin les indices correspondants au reste $m^{(i-1)}$ par les exposants

$$i-1,\quad 2i-1,\quad 3i-1,\ \ldots$$

Donc, puisque les restes

$$1,\ m',\ m'',\ \ldots,\ m^{(i-1)}$$

seront tous inégaux entre eux, les seuls indices positifs de l'unité seront les

divers multiples de i; et le plus petit de ces indices ou le nombre i montrera combien la suite périodique des restes, indéfiniment prolongée, renferme de restes différents. L'étendue de la période formée avec ces restes

$$1, m', m'', \ldots, m^{(i-1)},$$

se trouvera donc indiquée par le plus petit des indices de l'unité, auquel nous donnerons, pour cette raison, le nom d'*indicateur*. Cela posé, on pourra évidemment énoncer la proposition suivante.

» 4e *Théorème*. m, n désignant deux nombres entiers, et m étant premier à n, les seules puissances entières et positives de m qui seront équivalentes à l'unité suivant le module n, seront celles qui offriront pour exposants l'indicateur i correspondant à la base m et ses divers multiples.

» On déduit immédiatement du 4e théorème celui que nous allons énoncer.

» 5e *Théorème*. Si le module n est décomposable en divers facteurs $n_{\prime}, n_{\prime\prime}, \ldots$, en sorte qu'on ait

$$n = n_{\prime}\, n_{\prime\prime} \ldots,$$

et si, la base m étant un nombre premier à n, on nomme

$$i_{\prime}, \; i_{\prime\prime}, \ldots$$

les indicateurs correspondants aux modules

$$n_{\prime}, \; n_{\prime\prime}, \ldots,$$

l'indicateur i, correspondant au module n, sera le plus petit nombre entier qui soit divisible par chacun des indicateurs $i_{\prime}, i_{\prime\prime}, \ldots$

» *Démonstration*. En effet, l'indicateur i correspondant au module n sera la plus petite des valeurs de i pour lesquelles se vérifiera la formule

$$m^i \equiv 1, \quad (\text{mod. } n).$$

D'ailleurs, n étant égal au produit des facteurs $n_{\prime}, n_{\prime\prime}, \ldots$, cette formule entraînera les suivantes :

$$m^i \equiv 1, \quad (\text{mod. } n_{\prime}), \quad m^i \equiv 1, \; (\text{mod. } n_{\prime\prime}), \text{ etc.}$$

Donc, en vertu du théorème précédent, i devra être à la fois un des multiples de $n_{\prime}$, un des multiples de $n_{\prime\prime}$,... Donc la valeur cherchée de i sera la plus petite de celles qui seront à la fois divisibles par $n_{\prime}$, par $n_{\prime\prime}$,.....

» L'indicateur i, correspondant à un module donné n, varie généralement avec la base m, mais cette variation s'effectue suivant certaines lois, et l'on peut énoncer à ce sujet les propositions suivantes.

» 6e *Théorème*. Si la base m est décomposable en deux facteurs

$$m_{\prime},\ m_{\prime\prime},$$

auxquels correspondent des indicateurs

$$i_{\prime},\ i_{\prime\prime},$$

premiers entre eux, dans le cas où le nombre n est pris pour module; on aura non-seulement

$$m = m_{\prime}\, m_{\prime\prime},$$

mais encore, en désignant par i l'indicateur correspondant à la base m et au module n,

$$i = i_{\prime}\, i_{\prime\prime}.$$

» *Démonstration*. L'indicateur i relatif à la base m vérifiera la formule

$$m^i \equiv 1, \quad (\text{mod. } n),$$

de laquelle on tirera

$$m^{2i} \equiv 1, \quad m^{3i} \equiv 1, \text{ etc.},$$

et généralement, si l'on désigne par j un multiple quelconque de i,

$$(17) \qquad m^j \equiv 1, \quad (\text{mod. } n),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(18) \qquad m_{\prime}^{\,j}\, m_{\prime\prime}^{\,j} \equiv 1, \quad (\text{mod. } n).$$

D'autre part, les indicateurs $i_{\prime}$, $i_{\prime\prime}$, relatifs aux bases $m_{\prime}$, $m_{\prime\prime}$, vérifieront les équivalences

$$(19) \qquad m_{\prime}^{\,i_{\prime}} \equiv 1, \quad m_{\prime\prime}^{\,i_{\prime\prime}} \equiv 1, \quad (\text{mod. } n);$$

et il suffira que $i_{,}$ divise j pour que la première des formules (19) entraîne l'équivalence

$$m_{,}^{j} \equiv 1, \text{ (mod. } n),$$

par conséquent, eu égard à la formule (18), l'équivalence

$$m_{,,}^{j} \equiv 1, \text{ (mod. } n),$$

qui suppose (voir le 4e théorème) j divisible par $i_{,,}$. Ainsi, de ce que le nombre i vérifie l'équivalence

$$m^{i} \equiv 1, \text{ (mod. } n),$$

il résulte que tout multiple de i, divisible par $i_{,}$, sera en même temps divisible par $i_{,,}$; en sorte que $i_{,,}$ divisera nécessairement le produit $ii_{,}$, et par suite le nombre i, si $i_{,}, i_{,,}$ sont premiers entre eux. Mais alors i divisible par $i_{,}$ devra l'être pareillement, et pour la même raison, par $i_{,,}$. Donc, si $i_{,}$, $i_{,,}$ sont premiers entre eux, tout nombre i, propre à vérifier l'équivalence

$$m^{i} \equiv 1, \text{ (mod. } n),$$

sera divisible par le produit $i_{,} i_{,,}$, et l'indicateur correspondant à la base m, ou la plus petite des valeurs de i pour lesquelles on aura

$$m^{i} \equiv 1, \text{ (mod. } n),$$

devra se réduire à ce produit.

» 7e *Théorème*. Soient

$$i_{,},\ i_{,,},$$

les indicateurs correspondants à deux bases diverses

$$m_{,},\ m_{,,},$$

mais à un même module n. Le plus grand commun diviseur ω des indicateurs $i_{,}$, $i_{,,}$, pourra être décomposé, souvent même de plusieurs manières, en deux facteurs u, v tellement choisis, que les rapports

$$\frac{i_{,}}{u},\quad \frac{i_{,,}}{v}$$

soient des nombres premiers entre eux; et, si l'on pose alors

$$m = m_{,}^{u} m_{,,}^{v},$$

l'indicateur i, relatif à la base m, sera le plus petit nombre entier que puissent diviser simultanément les indicateurs $i_{,}$, $i_{,,}$.

» *Démonstration.* Concevons que le plus grand commun diviseur ω de $i_{,}$, $i_{,,}$ soit décomposé en facteurs

$$\alpha, \; 6, \; \gamma, \; \ldots,$$

dont chacun représente un nombre premier, ou une puissance d'un nombre premier. Deux produits

$$u, \; v,$$

formés avec ces mêmes facteurs, de manière que l'on ait

$$uv = \omega,$$

fourniront pour les rapports

$$\frac{i_{,}}{u}, \quad \frac{i_{,,}}{v},$$

des nombres premiers entre eux, si l'on fait concourir chaque facteur, par exemple le facteur α, à la formation du produit u, quand α est premier à $\frac{i_{,}}{\alpha}$; du produit v, quand α est premier à $\frac{i_{,,}}{\alpha}$; enfin du produit u ou du produit v indifféremment, quand α est premier à chacun des deux nombres

$$\frac{i_{,}}{\alpha}, \quad \frac{i_{,,}}{\alpha}.$$

Les deux produits u, v étant formés, comme on vient de le dire, pour déduire le théorème 7 du théorème 6, il suffit d'observer que,

$$i_{,}, \quad i_{,,}$$

étant les indicateurs relatifs aux bases

$$m_{,}, \; m_{,,},$$

les nombres entiers

$$\frac{i_{,}}{u}, \quad \frac{i_{,,}}{v}$$

seront les indicateurs relatifs aux bases

$$m_{\prime}^{u}, \quad m_{\prime\prime}^{v},$$

et que, ces indicateurs étant premiers entre eux, la base m déterminée par la formule

$$m = m_{\prime}^{u} m_{\prime\prime}^{v}$$

devra correspondre à l'indicateur

$$i = \frac{i_{\prime}}{u} \frac{i_{\prime\prime}}{v} = \frac{i_{\prime} i_{\prime\prime}}{\omega}.$$

Or cette dernière valeur i sera précisément le plus petit nombre entier que puissent diviser simultanément les indicateurs $i_{\prime}$, $i_{\prime\prime}$.

» *Corollaire* 1[er]. Pour montrer une application du théorème 7, considérons en particulier le cas où l'on aurait

$$n = 78,$$

$$m_{\prime} = 5, \quad m_{\prime\prime} = 29.$$

Comme

$$5^4 \quad \text{et} \quad 29^6$$

seront les puissances les moins élevées des nombres 5 et 29, qui, divisées par le module 78, donneront pour reste l'unité, on aura nécessairement

$$i_{\prime} = 4, \quad i_{\prime\prime} = 6, \quad \omega = 2,$$

et par suite

$$u = 1, \quad v = 2,$$

attendu que des deux rapports

$$\frac{i_{\prime}}{2} = 2, \quad \frac{i_{\prime\prime}}{2} = 3,$$

le second seul sera premier au facteur 2 de ω. Cela posé, pour obtenir une base m correspondante à l'indicateur

$$i = \frac{i_{\prime} i_{\prime\prime}}{\omega} = 12,$$

il suffira de prendre

$$m = m_{,}^{u} m_{,,}^{v} = 5.29^{2};$$

et, puisque

$$5.29^{2} \equiv 71 \equiv -7, \quad (\text{mod. } 78),$$

il suffira de prendre

$$m = 71.$$

Effectivement, 71^{12} est la première puissance de 71 qui, divisée par 78, donne pour reste l'unité.

» *Corollaire* 2e. Étant données deux bases

$$m_{,}, \ m_{,,},$$

qui correspondent à deux indicateurs différents

$$i_{,}, \ i_{,,},$$

on peut toujours trouver une troisième base

$$m$$

qui corresponde à l'indicateur i représenté par le plus petit des nombres qui divisent à la fois les deux indicateurs donnés.

» *Corollaire* 3e. Soient

$$m_{,}, \quad m_{,,}, \quad m_{,,,},$$

trois bases différentes, et

$$i_{,}, \quad i_{,,}, \quad i_{,,,},$$

les indicateurs qui correspondent à ces trois bases, mais à un seul et même module n. Si l'on nomme i' le plus petit nombre que diviseront simultanément $i_{,,}$ et $i_{,,,}$, le plus petit nombre i que pourront diviser simultanément $i_{,}$ et i' sera en même temps le plus petit des nombres divisibles par chacun des trois facteurs

$$i_{,}, \ i_{,,}, \ i_{,,,}.$$

D'ailleurs, à l'aide du 7e théorème, on pourra trouver non-seulement une base m' correspondante à l'indicateur i', mais encore une base m cor-

respondante à l'indicateur i. Donc, étant données trois bases différentes avec un seul module, on peut toujours trouver une nouvelle base qui corresponde à l'indicateur représenté par le plus petit des nombres que divisent les trois indicateurs correspondants aux trois bases données. En appliquant un raisonnement semblable au cas où l'on donnerait quatre ou cinq bases au lieu de trois, on obtiendra généralement la proposition suivante.

» 8e *Théorème.* Étant données plusieurs bases différentes

$$m_{\prime},\ m_{\prime\prime},\ m_{\prime\prime\prime},\ \ldots,$$

avec un seul module n, on peut toujours trouver une nouvelle base qui corresponde à l'indicateur représenté par le plus petit des nombres que divisent à la fois les indicateurs correspondants aux bases données.

» *Corollaire.* Si le système des bases données

$$m_{\prime},\ m_{\prime\prime},\ m_{\prime\prime\prime},\ \ldots$$

comprend tous les entiers inférieurs au module donné n et premiers à ce module, les indicateurs

$$i_{\prime},\ i_{\prime\prime};\ i_{\prime\prime\prime},\ \ldots,$$

relatifs à ces mêmes bases, seront tous ceux qui peuvent correspondre au module n. Cela posé, on doit conclure du théorème 8 que tous les indicateurs correspondants à un module donné divisent un même nombre qui coïncide avec l'un de ces indicateurs. Il est d'ailleurs évident que ce dernier doit être le plus grand de tous les indicateurs, ou celui qu'on peut appeler l'*indicateur maximum.* Nommons I cet indicateur maximum. En vertu de la remarque précédente et du 4e théorème, l'équivalence

$$(20)\qquad m^{\mathrm{I}} \equiv 1,\ (\text{mod. } n)$$

se trouvera vérifiée toutes les fois que le nombre m sera premier au module n; et, dans cette supposition, l'on résoudra en nombres entiers l'équation

$$mx \pm ny = \pm l,$$

en prenant

$$(21)\qquad x \equiv \pm m^{\mathrm{I}-1} l.$$

» Il nous reste à déterminer, pour chaque module n, l'indicateur maximum I. Cette détermination de l'indicateur maximum se trouve intimement liée à la recherche des valeurs correspondantes de la base m, valeurs que nous appellerons *racines primitives* du module n, en généralisant une définition admise par les géomètres pour le cas où ce module est la première puissance ou même une puissance quelconque d'un nombre premier impair. D'ailleurs la détermination dont il s'agit se déduit aisément des propositions déjà établies, jointes à quelques autres théorèmes que nous allons énoncer.

» 9e *Théorème*. Soient n un nombre premier, et X une fonction entière de x, dans laquelle les coefficients numériques des diverses puissances de x se réduisent à des nombres entiers. Si l'on nomme r une racine de l'équivalence

$$(22) \qquad X \equiv 0, \ (\text{mod. } n),$$

et $X_{,}$ un second polynome semblable au polynome X, mais du degré immédiatement inférieur; on pourra choisir ce second polynome de manière que l'on ait, pour toute valeur entière de x,

$$(23) \qquad X \equiv (x - r)\, X_{,}, \ (\text{mod. } n).$$

» *Démonstration*. En effet, soit R ce que devient X pour $x = r$. La différence $X - R$ sera divisible algébriquement par $x - r$, et le quotient sera un polynome $X_{,}$ semblable au polynome X, mais du degré immédiatement inférieur. Comme on aura d'ailleurs identiquement

$$X - R = (x - r)\, X_{,};$$

et de plus,

$$R \equiv 0, \ (\text{mod. } n),$$

on en conclura, en attribuant à x une valeur entière quelconque,

$$X \equiv (x - r)\, X_{,}, \ (\text{mod. } n).$$

» *Corollaire* 1er. En vertu de la formule (23), l'équivalence (22), réduite à

$$(x - r)\, X_{,} \equiv 0, \ (\text{mod. } n),$$

se décomposera en deux autres, savoir :

$$(24) \qquad x - r \equiv 0, \quad X_{,} \equiv 0, \quad (\text{mod. } n).$$

Il est d'ailleurs aisé de voir que le coefficient de la plus haute puissance de x restera le même dans les deux polynomes X, $X_{,}$. Cela posé, concevons que, ce coefficient étant premier au module n, la racine r se réduise à l'un des entiers inférieurs à ce module, et nommons

$$r, \ r', \ r'', \ldots$$

les diverses racines de l'équivalence (22), représentées par divers entiers inférieurs à n. Une racine r' distincte de r, ne pouvant vérifier la première des formules (24), vérifiera nécessairement la seconde. Si d'ailleurs le polynome X est du premier degré ou de la forme $ax + b$, a étant premier à n, on aura

$$X_{,} = a;$$

et, la seconde des formules (24) ne pouvant être vérifiée, l'équation (21) n'admettra point de racine distincte de r et inférieure à n. Si le polynome X est du second degré, alors, le polynome $X_{,}$ étant du premier degré, la seconde des formules (24) admettra une seule racine inférieure à n, et par suite l'équation (22) admettra au plus deux racines distinctes inférieures à n. En continuant ainsi à faire croître le degré du polynome X, on déduira évidemment des formules (24) la proposition suivante.

» 10ᵉ. *Théorème.* Soient n un nombre premier, et X une fonction entière de x, dans laquelle les coefficients numériques des diverses puissances de x se réduisent à des nombres entiers, le coefficient de la puissance la plus élevée étant premier au module n. Le degré du polynome X ne pourra être surpassé par le nombre des racines distinctes et inférieures à n qui vérifieront l'équivalence

$$X \equiv 0, \ (\text{mod. } n).$$

» *Corollaire* 1ᵉʳ. Le module n étant un nombre premier, et I étant l'indicateur maximum relatif à ce module, chacun des nombres

$$1, \ 2, \ 3, \ldots, n-1,$$

inférieurs et premiers au module n, représentera une valeur de m propre à vérifier la formule (20), et sera par conséquent une racine de l'équivalence

$$x^{\mathrm{I}} - 1 \equiv 0, \quad (\text{mod. } n).$$

Donc, en vertu du théorème 10e, l'indicateur maximum I ne pourra être inférieur au nombre des entiers

$$1, 2, 3, \ldots, n-1,$$

c'est-à-dire au nombre

$$\mathrm{N} = n - 1;$$

et puisque, en vertu du théorème 4, joint au théorème de Fermat, I devra diviser ce même nombre, on aura nécessairement

$$(25) \qquad \mathrm{I} = \mathrm{N} = n - 1.$$

» *Corollaire* 2e. La formule (25) s'étend au cas même où l'on aurait

$$n = 2,$$

et par suite

$$\mathrm{I} = \mathrm{N} = 1.$$

» Supposons maintenant que le module n cesse d'être un nombre premier; alors on établira facilement les propositions suivantes.

» 11e *Théorème.* ν étant un module quelconque, i un nombre entier, x une quantité entière qui vérifie l'équivalence

$$(26) \qquad x \equiv 1, \ (\text{mod. } \nu),$$

et z le quotient de $x - 1$ par ν, l'équation

$$x = 1 + \nu z$$

entraînera l'équivalence

$$(27) \qquad x^i \equiv 1 + \nu i z, \ (\text{mod. } \nu^2).$$

» *Démonstration.* En effet, dans le développement de

$$x^i = (1 + \nu z)^i,$$

tous les termes, à l'exception des deux premiers, seront divisibles par ν^2.

» *Corollaire* 1er. Si z ou i sont divisibles par ν, la formule (27) se réduira simplement à la suivante:

(28) $$x^i \equiv 1, \text{ (mod. } \nu^2\text{)}.$$

Mais cette réduction ne pourra plus s'effectuer si z et i sont premiers à ν.

» *Corollaire* 2e. Si i est premier à ν, la valeur de x fournie par l'équation

$$x = 1 + \nu z$$

ne pourra vérifier la formule (28), à moins que z ne devienne divisible par ν, c'est-à-dire à moins que l'on n'ait

(29) $$x \equiv 1, \text{ (mod. } \nu^2\text{)}.$$

» *Corollaire* 3e. Supposons que ν devienne un nombre premier, et que la quantité entière x soit équivalente à l'unité suivant le module ν, mais non suivant le module ν^2, en sorte que x vérifie la condition (26), sans vérifier la condition (29) : on ne pourra satisfaire à l'équivalence (28) qu'en attribuant à l'exposant i une valeur divisible par ν. Donc, parmi les puissances de x qui deviendront équivalentes à l'unité suivant le module ν^2, la moins élevée sera x^ν. En d'autres termes, ν sera l'indicateur correspondant au module

$$n = \nu^2,$$

et à la base

$$x = 1 + \nu z,$$

tant que z restera premier à ν.

» *Corollaire* 4e. Si, le module ν étant un nombre premier, la quantité

$$x = 1 + \nu z$$

devient positive et inférieure à ν^2, elle ne pourra être qu'un terme de la progression arithmétique

(30) $$1, \ 1 + \nu, \ 1 + 2\nu, \ \ldots, \ 1 + (\nu - 1)\nu.$$

Or, comme le premier terme de cette progression vérifie seul la for-

mule (29), il résulte du corollaire précédent que l'indicateur correspondant à l'un quelconque des autres termes et au module ν^2 sera le nombre premier ν.

» *Corollaire* 5ᵉ. Si, dans les formules (26), (28), (29), on remplace x par $\frac{x}{y}$, x et y désignant deux nombres entiers premiers à ν, ces formules deviendront

$$(31) \qquad \begin{cases} x \equiv y, \text{ (mod. } \nu\text{)}, \\ x^i \equiv y^i, \text{ (mod. } \nu^2\text{)}, \\ x \equiv y, \text{ (mod. } \nu^2\text{)}. \end{cases}$$

Donc, lorsque i sera premier à ν, non-seulement les formules (26) et (28) entraîneront la formule (29); mais de plus les deux premières des formules (31) entraîneront la troisième, d'où il résulte qu'elles ne pourront subsister en même temps, si x, y, sont tous deux positifs et inférieurs à ν^2.

» *Corollaire* 6ᵉ. ν étant un nombre premier, r une racine primitive de ν, et x l'une des quantités entières qui vérifient la formule

$$(32) \qquad x \equiv r, \text{ (mod. } \nu\text{)},$$

nommons i l'indicateur correspondant à la base r et au module

$$n = \nu^2.$$

On aura

$$x^i \equiv 1, \text{ (mod. } \nu^2\text{)},$$

par conséquent,

$$x^i \equiv 1, \text{ (mod. } \nu\text{)};$$

et, comme la formule (32) donnera

$$x^i \equiv r^i, \text{ (mod. } \nu\text{)},$$

on aura encore

$$r^i \equiv 1, \text{ (mod. } \nu\text{)}.$$

Donc, en vertu du 4ᵉ théorème, i sera ou le nombre $\nu - 1$ qui représente l'indicateur correspondant au module ν et à la racine primitive r, ou un multiple de ce nombre. Mais, d'autre part, l'indicateur i devra diviser le

nombre N des entiers inférieurs et premiers à ν^2, savoir, le produit

$$N = \nu(\nu - 1).$$

Or, ν étant premier, les seuls multiples de $\nu - 1$ qui diviseront ce produit seront

$$\nu - 1 \quad \text{et} \quad N.$$

Donc, dans l'hypothèse admise, on aura

$$i = \nu - 1, \quad \text{ou} \quad i = N = \nu(\nu - 1).$$

» Observons maintenant que, parmi les valeurs de x propres à vérifier la formule (32), celles qui seront positives et inférieures à ν^2 se réduiront aux termes de la progression arithmétique

$$(33) \qquad r, \; r + \nu, \; r + 2\nu, \ldots, \; r + (\nu - 1)\nu,$$

et qu'en vertu du corollaire précédent, si l'on désigne par x, y deux de ces termes, l'équation

$$x^i \equiv y^i, \quad (\text{mod. } \nu^2)$$

ne pourra subsister, quand i sera premier à ν. Donc la valeur $\nu - 1$ de l'indicateur i ne pourra correspondre qu'à un seul des termes de la progression (33), et pour chacun des autres termes, on aura nécessairement $i = N$.

» *Corollaire* 7e. Le module

$$x = \nu^2$$

étant le carré d'un nombre premier ν, un seul terme de la progression (33) peut représenter une racine de l'équation

$$(34) \qquad x^{\nu - 1} \equiv 1, \quad (\text{mod. } \nu^2).$$

Pour chacun des autres l'indicateur i acquiert la plus grande valeur N qu'il puisse atteindre, puisqu'il doit diviser N. Donc tous les termes de la progression (33) qui ne vérifient pas la condition (34) sont des

racines primitives de ν^2, et l'indicateur maximum I relatif au module ν^2 est

$$(35) \qquad I = N = \nu(\nu - 1).$$

» *Corollaire* 8e. La formule (35) s'étend au cas même où l'on aurait

$$\nu = 2, \quad n = \nu^2 = 4,$$

et par suite

$$N = 2.$$

On a donc, en prenant 4 pour module,

$$I = N = 2.$$

Alors aussi on obtient une seule racine primitive r inférieure à 4, savoir,

$$r = 3.$$

» 12e *Théorème.* $\nu > 1$ étant un nombre premier et x une quantité entière qui vérifie l'équivalence

$$x \equiv 1, \ (\text{mod. } \nu);$$

si l'on représente par n la puissance la plus élevée de ν qui divise la différence

$$x - 1,$$

le produit $n\nu$ représentera la puissance la plus élevée de ν qui divisera la différence

$$x^\nu - 1,$$

à moins que l'on n'ait

$$n = \nu = 2.$$

» *Démonstration.* Nommons z le quotient de $x - 1$ par n. On aura

$$x = 1 + nz,$$

z étant, par hypothèse, premier à ν. Or, dans le développement de

$$x^\nu = (1 + nz)^\nu,$$

les termes extrêmes seront

$$1,\ n^\nu z^\nu,$$

et tous les autres seront évidemment divisibles par le produit $n\nu$. D'ailleurs, ν étant facteur de n, le terme

$$n^\nu z^\nu = n.n^{\nu-1} z^\nu$$

sera lui-même divisible par le produit $n\nu$. Donc ce produit divisera la différence

$$x^\nu - 1.$$

» Il y a plus, ν étant un facteur de n, ν^2 sera un facteur de $n^{\nu-1}$, à moins que l'on n'ait

$$(36)\qquad n = \nu = 2;$$

et par suite, si la condition (36) n'est pas remplie, tous les termes qui suivront les deux premiers dans le développement de

$$(1 + nz)^\nu$$

seront divisibles ou par $n^2\nu$ ou au moins par $n\nu^2$. On aura donc alors

$$x^\nu \equiv 1 + n\nu z,\ (\text{mod. } n\nu^2).$$

Donc, z étant premier à ν, le produit $n\nu$ sera la puissance la plus élevée de ν qui divise la différence

$$x^\nu - 1.$$

» *Corollaire* 1er. Si, dans le 12e théorème, on remplace successivement x par x^ν, puis par x^{ν^2}, etc., on en conclura que, dans l'hypothèse admise, les puissances les plus élevées de ν, propres à diviser les différences

$$x^\nu - 1,\ x^{\nu^2} - 1,\ x^{\nu^3-1},\ \ldots,$$

seront respectivement

$$n\nu,\ n\nu^2,\ n\nu^3,\ \ldots$$

On doit toujours excepter le cas où l'on aurait $n = \nu = 2$.

» *Corollaire* 2e. En remplaçant dans le corollaire précédent x par x^i, on obtiendra une proposition dont voici l'énoncé : Si, $\nu > 1$ étant un nombre premier, on représente par n la plus élevée des puissances de ν qui divisent

$$x^i - 1,$$

alors les puissances les plus élevées de ν qui diviseront les différences

$$x^{i\nu} - 1, \quad x^{i\nu^2} - 1, \quad x^{i\nu^3} - 1, \ \ldots,$$

seront respectivement

$$n\nu, \quad n\nu^2, \quad n\nu^3, \ \ldots,$$

à moins que l'on n'ait $n = \nu = 2$.

» *Corollaire* 3e. ν étant un nombre premier impair, et r une racine primitive de ν^2, la puissance

$$r^{\nu-1} - 1$$

sera divisible une seule fois par ν. Donc, en vertu du corollaire 2e, les puissances les plus élevées de ν qui diviseront les différences

$$r^{\nu(\nu-1)} - 1, \quad r^{\nu^2(\nu-1)} - 1, \quad r^{\nu^3(\nu-1)} - 1, \text{ etc.},$$

seront respectivement

$$\nu^2, \quad \nu^3, \quad \nu^4, \quad \text{etc.}$$

Donc

$$r^{\nu^2(\nu-1)}$$

sera le premier des termes de la suite

$$(37) \qquad r^{\nu-1}, \quad r^{\nu(\nu-1)}, \quad r^{\nu^2(\nu-1)}, \quad r^{\nu^3(\nu-1)}, \ \ldots$$

qui seront équivalents à l'unité, suivant le module ν^2. D'autre part, si l'on nomme i l'indicateur correspondant à la base r et au module ν^2, on aura

$$r^i \equiv 1, \ (\text{mod. } \nu^2),$$

et à plus forte raison

$$r^i \equiv 1, \ (\text{mod. } \nu);$$

d'où il résulte que i devra être un multiple de l'indicateur $\nu - 1$ corres-

pondant à la base r et au module ν. Donc i, qui devra en outre diviser le produit

$$N = \nu^{a-1}(\nu - 1),$$

représentera l'exposant de r dans le premier des termes de la suite (37) qui seront équivalents à l'unité suivant le module ν^a. On aura donc nécessairement

$$i = N = \nu^{a-1}(\nu - 1).$$

Cette dernière valeur de i étant la plus grande que puisse acquérir un indicateur relatif au module ν^a, nous devons conclure des observations précédentes, qu'une racine primitive r de ν^2 sera en même temps une racine primitive de ν^a, et que, dans le cas où le module

$$n = \nu^a$$

se réduit à une puissance d'un nombre premier impair, l'indicateur maximum I est déterminé par la formule

$$\text{(38)} \qquad I = N = \nu^{a-1}(\nu - 1).$$

» *Corollaire* 4ᵉ. Considérons en particulier le cas où l'on aurait

$$n = \nu = 2,$$

et supposons en conséquence la différence

$$x - 1$$

divisible une seule fois par le module 2. La différence

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

sera composée de deux facteurs $x - 1$, $x + 1$, divisibles l'un par 2 l'autre par 4. Elle sera donc divisible au moins par le nombre 8, c'est-à-dire par le cube de 2. Cela posé, nommons n la plus haute puissance de 2, qui divisera $x^2 - 1$. En vertu du corollaire 2ᵉ, les puissances les plus élevées de 2 qui diviseront les différences

$$x^{2^2} - 1, \quad x^{2^3}, \text{ etc.},$$

seront respectivement

$$2n, \quad 2^2 n, \text{ etc.}$$

Donc, si a surpasse 2, le premier terme de la suite

$$x^2, \quad x^{2^2}, \quad x^{2^3}, \ldots,$$

qui deviendra équivalent à l'unité suivant le module 2^a, sera

$$x^i,$$

la valeur de i étant

(39) $$i = \frac{2^{a+1}}{n}.$$

D'autre part, l'indicateur correspondant à la base x et au module 2^a, devra être un diviseur de

$$N = 2^{a-1}.$$

Il se trouvera donc compris dans la suite

$$2, \quad 2^2, \quad 2^3, \ldots,$$

et ne pourra être que la valeur précédente de i. Cette même valeur deviendra la plus grande possible, lorsque le nombre n se réduira simplement à 8, ce qui arrivera si l'on prend

$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = 5,$$

puisque l'on a

$$3^2 - 1 = 8 \quad \text{et} \quad 5^2 - 1 = 3.8.$$

Par conséquent

(40) $$I = \tfrac{1}{2} N = 2^{a-2}$$

sera l'indicateur maximum relatif au module

$$n = 2^a > 4.$$

» La formule (40) s'étend au cas même où l'on aurait $a = 3$, et donne alors, comme on devait s'y attendre,

$$I = \tfrac{1}{2} N = 2.$$

» A l'aide des diverses propositions que nous venons de rappeler, et qui pour la plupart était déjà connues (voir les *Recherches arithmétiques* de M. Gauss et le *Canon arithmeticus* de M. Jacobi), il nous sera maintenant facile de résoudre la question suivante.

» 2e *Problème*. Trouver l'indicateur maximum I correspondant à un module donné n.

» *Solution*. Pour résoudre ce problème, il faut considérer successivement les divers cas qui peuvent se présenter, suivant que le module n est un nombre premier ou une puissance d'un tel nombre, ou un nombre composé.

» Si le module n est un nombre premier ν, ou une puissance d'un nombre premier impair, ou l'une des deux premières puissances de 2, alors, en nommant N le nombre des entiers inférieurs à n, et premiers à n, on aura généralement, d'après ce qui a été dit ci-dessus,

$$I = N = n\left(1 - \frac{1}{\nu}\right);$$

et en particulier, si n se réduit à 2 ou à 4,

$$I = N = \frac{1}{2} n.$$

» Si le module n est une puissance de 2, supérieure à la seconde, on aura simplement

$$I = \frac{1}{2} N = \frac{1}{4} n.$$

» Enfin, si le module n est un nombre quelconque, on pourra le décomposer en facteurs

$$n_{\prime}, n_{\prime\prime}, \ldots,$$

dont chacun soit un nombre premier ou une puissance d'un nombre premier. Soient alors

$$I_{\prime}, I_{\prime\prime}, \ldots$$

les indicateurs maxima correspondants aux modules

$$n_{\prime}, n_{\prime\prime}, \ldots$$

En vertu des théorèmes 3 et 5, une base donnée r sera une racine primi-

tive de n, si cette base, divisée successivement par chacun des nombres $n_{,}$, $n_{,,}$,..., fournit pour restes des racines primitives de ces mêmes nombres; et I sera le plus petit nombre entier divisible à la fois par chacun des indicateurs

$$I_{,},\ I_{,,},\ \ldots$$

» La solution du problème précédent fournit, pour la résolution des équivalences du premier degré, une règle très simple, qui se réduit à la règle donnée par M. Libri et par M. Binet, dans le cas particulier où le module est un nombre premier. La nouvelle règle, d'après ce que nous a dit M. Poinsot, coïncide, au moins lorsque le module est pair, avec celle que lui-même avait indiquée dans la Note manuscrite, remise à M. Legendre. Appliquée au cas où l'on prend pour module un nombre composé, elle n'exige pas, comme les méthodes présentées par M. Libri et M. Binet, la décomposition de ce module en facteurs premiers; et ce qu'il y a de remarquable, c'est qu'alors l'application devient d'autant plus facile que le module est un nombre plus composé. Montrons la vérité de cette assertion par quelques exemples.

» Pour que toute équation indéterminée à deux inconnues puisse être résolue immédiatement à la seule inspection des coefficients de ces inconnues, dans le cas où l'un des coefficients ne surpasse par 1000, il suffit que l'on construise un tableau qui, pour tout module renfermé entre les limites 1 et 1000, fournisse l'indicateur correspondant à ce module. Or, à l'aide de ce tableau, dont la construction est facile (voir la solution du 2[e] problème), et dont une partie se trouve à la suite de ce Mémoire (page 846), on reconnaît que l'indicateur 2 correspond aux modules

$$3,\ 4,\ 6,\ 12,\ 24.$$

Donc pour chacun de ces modules, l'inverse d'un nombre donné est équivalent à ce nombre même.

» Ainsi, en particulier, l'inverse du nombre 19 suivant le module 24 est équivalent à 19. En d'autres termes, 19 est une des valeurs entières de x qui vérifient l'équation indéterminée

$$19x - 24y = 1.$$

Effectivement, le carré de 19 ou 361, divisé par 24, donne 1 pour reste.

» De ce que l'indicateur 4 correspond aux modules

$$5, 10, 15, 16, 20, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240,$$

il résulte immédiatement que, pour chacun de ces modules, l'inverse d'un nombre donné est équivalent au cube de ce même nombre. Ainsi, en particulier, l'inverse du nombre 67 suivant le module 120 est équivalent au cube de 67, par conséquent au produit de 67 par 49, ou à 43. En d'autres termes, 43 est une des valeurs de x qui vérifient l'équation

$$67x - 120y = 1.$$

Effectivement,

$$67 \times 43 = 2881 = 24 \times 120 + 1.$$

» De ce que l'indicateur 6 correspond aux modules

$$7, 9, 14, 18, 21, 28, 36, 42, 56, 63, 72, 84, 168, 504,$$

il résulte immédiatement que, pour chacun de ces modules, l'inverse d'un nombre donné est équivalent à la 5e puissance de ce nombre. Ainsi, en particulier, l'inverse du nombre 17 sera équivalent, suivant le module 504, à

$$17^5 = 1419857,$$

par conséquent à 89. En d'autres termes 89 est une valeur de x propre à vérifier l'équation indéterminée

$$17x - 504y = 1.$$

Effectivement,

$$17 \times 89 = 1513 = 3 \times 504 + 1.$$

» Comme dans la méthode ci-dessus exposée la valeur de x est toujours exprimée par une puissance connue du nombre donné, le calcul pourra s'exécuter commodément, à l'aide des tables de logarithmes, même quand l'indicateur sera composé de plusieurs chiffres.

» Supposons, pour fixer les idées, que, le nombre donné étant 29, on demande un autre nombre équivalent à l'inverse du premier, suivant le module 192. L'indicateur étant alors égal à 16, le nombre cherché sera

$$29^{15} = (29^5)^3.$$

D'ailleurs les sept premiers chiffres de la valeur approchée de 29^5, déterminés à l'aide des tables de logarithmes, sont ceux que présente le nombre

$$20511115,$$

attendu que l'on a

$$5 \log 29 = 7,3119900.$$

De plus, le dernier chiffre de 29^5, comme celui de 9^5, sera nécessairement 9. On aura donc par suite

$$29^5 = 20511149 \equiv 173 \equiv -19, \ (\text{mod. } 192),$$
$$29^{15} \equiv -19^3, \ (\text{mod. } 192);$$

puis, en se servant de nouveau des tables de logarithmes,

$$29^{15} \equiv -6859 \equiv -139 \equiv 53, \ (\text{mod. } 192).$$

Donc, 29^{15} et 53 seront deux valeurs de x propres à vérifier la formule

$$29x - 192y = 1.$$

Effectivement,

$$29.53 = 1537 = 8.192 + 1.$$

» Nous exposerons dans un autre article la méthode par laquelle on peut trouver facilement les valeurs entières, nulles ou positives, de plusieurs inconnues liées entre elles par des équations indéterminées du premier degré. »

M. Cauchy présente à l'Académie un Mémoire sur les *racines quadratiques,* dont un extrait sera publié dans un des prochains *Comptes rendus.*

TABLEAU pour la détermination de l'indicateur maximum I *correspondant à un module donné n.*

n.	I.	*n.*	I.	*n.*	I.	*n.*	I.	*n.*	I.
		21	6	41	40	61	60	81	54
2	1	22	10	42	6	62	30	82	40
3	2	23	22	43	42	63	6	83	82
4	2	24	2	44	10	64	16	84	6
5	4	25	20	45	12	65	12	85	16
6	2	26	12	46	22	66	10	86	42
7	6	27	18	47	46	67	66	87	28
8	2	28	6	48	4	68	16	88	10
9	6	29	28	49	42	69	22	89	88
10	4	30	4	50	20	70	12	90	12
11	10	31	30	51	16	71	70	91	90
12	2	32	8	52	12	72	6	92	22
13	12	33	10	53	52	73	72	93	30
14	6	34	16	54	18	74	36	94	46
15	4	35	12	55	20	75	20	95	36
16	4	36	6	56	6	76	18	96	8
17	16	37	36	57	18	77	30	97	96
18	6	38	18	58	28	78	12	98	42
19	18	39	12	59	58	79	78	99	30
20	4	40	4	60	4	80	4	100	20

Sur la matière colorante du Peganum Harmala; *par* M. de Mirbel.

« L'année dernière, M. le Ministre de l'Agriculture et du Commerce envoya à l'administration du Muséum d'Histoire naturelle une centaine de kilog. de graines de *Peganum Harmala*, avec invitation de les distribuer à ceux de nos nombreux correspondants qui s'occupent d'agriculture. A cet envoi était jointe une Note annonçant que M. Goebel, professeur de chimie à Dorpat, avait retiré du *Peganum* un principe colorant d'un beau rouge. On supposa ici, je ne sais sur quel fondement, que ce principe était contenu dans la graine. Notre très habile confrère, M. Chevreul, l'y chercha et ne l'y trouva pas. J'écrivis au savant M. Bung, professeur de botanique à Dorpat, pour obtenir des renseignements précis. Il me répondit qu'il n'y avait pas de doute que le *Peganum* ne contînt un principe colorant rouge, lequel était employé avec succès en Turquie pour la teinture des étoffes de soie ou de laine, mais qu'il n'avait pu se procurer de renseignements sur les procédés d'extraction. Le 24 mars dernier, M. le professeur Ernest Meyer, dont le nom est très avantageusement connu de l'Académie, m'annonça l'envoi d'un essai de rouge d'*Harmala*, de la part du professeur Goebel. Je mets sous les yeux de l'Académie ces échantillons de soie et de laine, avec un petit paquet de râpure de la plante. Il est évident que ces débris ne proviennent pas de la graine. Tout porte à croire que le principe colorant réside dans la racine. Reste à savoir si, dans l'intérêt du producteur et du consommateur, le rouge d'*Harmala* doit être préféré à celui de la garance, avec lequel il paraît avoir beaucoup d'analogie. »

RAPPORTS.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Rapport sur un Mémoire de* M. Broch, *relatif à une certaine classe d'intégrales.*

(Commissaires, MM. Liouville, Cauchy rapporteur.)

Les géomètres connaissent les beaux travaux d'Abel et de M. Jacobi, sur la théorie des transcendantes elliptiques. On sait que d'importants Mémoires, relatifs à cette théorie, ont été composés par Abel, dans l'an-

née 1826 et les deux suivantes, que plusieurs de ces Mémoires ont été publiés dès cette époque, même dès l'année 1826, dans le *Journal scientifique* de M. Crelle; que l'un d'eux en particulier a été approuvé par l'Académie en 1829, sur le rapport d'une Commission dont M. Legendre faisait partie, puis couronné par l'Institut en 1830, et que la valeur du prix fut remise à la mère d'Abel. En effet, cet illustre norwégien, qu'un projet de mariage avait déterminé à entreprendre un voyage au plus fort de l'hiver, était malheureusement tombé malade vers le milieu de janvier 1829, et malgré les soins qui lui furent prodigués par la famille de sa fiancée, il était mort d'une phthisie, le 6 avril, alité depuis trois mois.

» C'est encore aujourd'hui pour les travaux d'un jeune norwégien, d'un compatriote d'Abel, que nous avons à réclamer un moment d'attention de la part de l'Académie. Le Mémoire de M. Broch a pour objet une certaine classe d'intégrales qui comprennent, comme cas particulier, les transcendantes elliptiques. Ces intégrales sont celles dont la dérivée peut être considérée comme le produit d'une certaine puissance entière de la variable x par deux facteurs, dont le premier est une fonction rationnelle d'une autre puissance entière x^p de x, et le second une racine quelconque d'une semblable fonction. Ces mêmes intégrales forment une classe particulière de transcendantes, qui se réduisent aux fonctions elliptiques, lorsque, le radical étant du second degré, le polynome renfermé sous le radical est du 4e degré.

» Dans le premier chapitre de son Mémoire, M. Broch s'occupe de la sommation des transcendantes en question, considérées comme fonctions de la variable x, ou plutôt de la sommation des valeurs que peut acquérir une semblable fonction pour des valeurs diverses de la variable. Il établit plusieurs théorèmes dignes de remarque; et prouve, par exemple, que la somme des diverses valeurs de la fonction, correspondantes aux diverses racines d'une certaine équation algébrique, peut être exprimée à l'aide d'une fonction algébrique et logarithmique des quantités que renferme l'équation dont il s'agit. Il montre ensuite le parti qu'on peut tirer de ce théorème et de quelques autres pour la réduction de la nouvelle espèce de transcendantes.

» Dans les derniers chapitres de son Mémoire, M. Broch fait voir qu'une transcendante quelconque de la forme indiquée peut toujours être exprimée à l'aide d'un certain nombre de fonctions plus simples de la même forme, et d'une fonction algébrique et logarithmique de la variable x. Les

fonctions irréductibles entre elles constituent alors, comme dans la théorie des fonctions elliptiques, diverses classes de transcendantes. Quand le nombre de ces fonctions irréductibles se réduit à zéro, l'intégration s'effectue complétement, à l'aide de fonctions algébriques et logarithmiques. Dans tout autre cas, elle est impossible. D'ailleurs, comme on devait s'y attendre, les cas où l'intégration s'effectue restent les mêmes, soit qu'on les déduise des théorèmes énoncés dans la première partie du Mémoire, ou de la méthode de réduction indiquée dans la seconde.

» Nous devons observer ici, 1° que les théorèmes énoncés par M. Broch s'accordent, dans des cas particuliers, avec ceux que renferment divers Mémoires d'Abel; 2° que M. Broch avait déjà traité, dans le *Journal de M. Crelle*, le cas où l'exposant p se réduit à l'unité; 3° qu'un Mémoire de deux pages, publié dans le premier volume des *OEuvres d'Abel*, contient les bases d'une théorie qui pourrait s'appliquer aux transcendantes considérées par M. Broch; 4° que ces mêmes transcendantes se trouvent aussi considérées dans le Mémoire d'Abel qui a remporté le prix, mais que M. Broch n'a pu connaître, puisqu'il n'est pas encore publié.

» Avant de terminer ce rapport où nous avons eu souvent à rappeler les travaux d'Abel, il nous paraît convenable de détruire une erreur assez généralement répandue. On a supposé qu'Abel était mort dans la misère, et cette supposition est devenue l'occasion de violentes attaques dirigées contre les savants de la Suède et des autres parties de l'Europe. Nous aimons à croire que les auteurs de ces attaques regretteront de s'être exprimés avec tant de vivacité, quand ils liront la préface des *OEuvres d'Abel*, publiées récemment en Norwége, par M. Holmboe, le professeur et l'ami de l'illustre géomètre. Ils y verront avec intérêt les encouragements flatteurs, les témoignages d'estime et d'admiration qu'Abel, durant sa vie, a reçus des savants, particulièrement de ceux qui s'occupaient, en même temps que lui, de la théorie des transcendantes elliptiques; et ils remarqueront avec consolation, au bas de la page VII, ces paroles qui suffiront pour éclaircir tous leurs doutes :

» *Un journal français dont je ne me rappelle pas le nom, m'est venu sous les yeux, où l'on a rapporté qu'Abel est mort dans la misère. On voit par les détails ci-dessus que ce rapport n'est pas conforme à la vérité.*

» Revenons à M. Broch. Ce que nous avons dit de ses recherches suffit pour en montrer toute l'importance. Les résultats auxquels il est arrivé, analogues à ceux qu'Abel a obtenus dans ses plus beaux Mémoires, montrent un esprit familiarisé avec les méthodes analytiques, et habitué à lutter avec

succès contre les difficultés que présentent les parties les plus élevées du calcul intégral. En résumé, le Mémoire de M. Broch prouve que l'auteur n'a pas trop présumé de ses forces en se proposant de marcher sur les traces d'Abel. Nous pensons que ce Mémoire est digne de l'approbation de l'Académie, et d'être inséré dans le *Recueil des Savants étrangers.* »

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

MÉMOIRES LUS.

CHIMIE APPLIQUÉE. — *Mémoire sur les chaux hydrauliques, les ciments et les pierres artificielles, suivi de considérations chimiques sur la formation des calcaires siliceux, et en général des espèces minérales formées par la voie humide; par* M. **Fréd. Kuhlmann**. (Extrait.)

(Commissaires, MM. Thenard, Cordier, Dumas, Pelouze.)

« A la suite de recherches qui concernent la théorie de la nitrification, l'auteur a été conduit à faire un examen attentif de la nature des efflorescences des murailles, de leur origine et des circonstances qui donnent lieu à leur formation. Ses investigations sur ce point lui ont permis de constater la présence de sels de potasse et de soude dans la plupart des calcaires des diverses époques géologiques, et en particulier, des calcaires susceptibles de donner des chaux hydrauliques naturelles ou des ciments. Par suite de ces résultats, il a été conduit à rechercher si les sels de potasse et de soude exercent quelque influence sur les propriétés de la chaux; si leur présence dans les calcaires siliceux peut jeter quelque jour sur la formation naturelle de ces pierres.

Chaux hydrauliques.

» J'ai reconnu, dit l'auteur, que si la chaux peut directement se combiner par la calcination avec la silice, lorsque cette dernière lui est présentée à l'état d'hydrate, il me paraît également démontré que cette combinaison est considérablement facilitée par l'addition au mélange d'un peu de potasse, de soude ou de sels de ces bases susceptibles de se transformer en silicates dans les conditions où la calcination a lieu. Pour déterminer la transformation d'une grande quantité de carbonate de chaux en silicate, il n'est pas nécessaire d'ajouter au mélange de craie ou de chaux et d'ar-

gile, une grande quantité d'alcali; car le rôle de ce dernier paraît se borner à faciliter le transport successif de la silice sur la chaux.

» M. Kuhlmann indique ensuite d'autres procédés de préparation de chaux et ciments hydrauliques dans lesquels il fait intervenir la silice ou l'alumine à l'état de dissolution dans l'eau, formant ainsi au contact de la chaux délitée des silicates et aluminates qui résistent à l'action de l'eau et possèdent toutes les propriétés, comme aussi la composition des chaux hydrauliques naturelles. Ce mode de préparation des chaux hydrauliques par voie humide exige l'emploi d'une plus grande quantité d'alcalis que le précédent, mais il a sur lui d'autres avantages qui compensent cet inconvénient. Ces avantages résident principalement dans la facilité de la préparation du mortier hydraulique avec la chaux grasse et dans la possibilité de graduer à volonté l'hydraulicité des chaux, au moment de l'emploi. M. Kuhlmann produit encore des chaux qui acquièrent une grande consistance en traitant par la voie sèche ou la voie humide, différents sulfates, et notamment ceux d'alumine, de fer, de manganèse, etc., par la chaux délitée.

» Quant à l'utilité de toutes ces préparations, M. Kuhlmann attend, pour se prononcer, qu'une longue expérience ait pu être acquise; que l'on ait pu apprécier suffisamment l'action de la gelée, celles des efflorescences salines et de la nitrification, toutes causes plus ou moins énergiques de destruction; et en terminant sur ce point, il dit que, tout en faisant intervenir un agent nouveau dans la théorie de la formation des chaux hydrauliques artificielles, il n'en regarde pas moins comme incontestables et fondamentales les bases sur lesquelles reposent les travaux si remarquables de M. Vicat, travaux qui honoreront à jamais le nom de cet habile ingénieur.

Pierres artificielles.

» Les silicates alcalins solubles sont devenus, entre les mains de M. Kuhlmann, l'objet d'applications plus étendues et non moins importantes.

» Il a remarqué qu'en mettant en contact, même à froid, la craie en poudre avec une dissolution de ces silicates, il y avait un certain échange d'acide entre les deux sels, et qu'une partie de la craie était transformée en silicate de chaux et une quantité correspondante de silicate de potasse en carbonate de potasse.

» En délayant de la craie en poudre dans une dissolution de silicate de potasse, on obtient un mastic qui durcit lentement à l'air, en prenant

assez de dureté pour devenir applicable dans quelques circonstances à la restauration des monuments publics, à la fabrication des objets de moulures, etc.

» La craie en pâte artificielle ou en pierre naturelle, plongée dans une dissolution de silicate de potasse, absorbe, même à froid, une quantité de silice qui peut devenir considérable, en exposant la pierre alternativement et à plusieurs reprises à l'action de la dissolution siliceuse et à l'air; la craie prend un aspect lisse, un grain serré et une couleur plus ou moins jaunâtre, suivant qu'elle était plus ou moins ferrugineuse.

» Les pierres ainsi préparées sont susceptibles de recevoir un beau poli; le durcissement d'abord superficiel pénètre peu à peu au centre, alors même que la pierre présente une assez grande épaisseur; elles paraissent pouvoir devenir d'une utilité incontestable pour faire des travaux de sculpture, des ornements divers d'un travail même très délicat, car lorsque la silicatisation a lieu sur des craies bien sèches (ce qui est essentiel pour obtenir de bons résultats), les surfaces ne sont nullement altérées. Des essais faits pour appliquer ces pierres à l'imprimerie lithographique promettent un succès complet.

» Cette méthode de transformer les calcaires tendres en calcaires siliceux peut devenir une conquête précieuse pour l'art de bâtir. Des ornements inaltérables à l'humidité et d'une grande dureté pourront être obtenus à des prix peu élevés, et dans beaucoup de cas un badigeonnage fait avec une dissolution de silicate de potasse pourra servir à préserver d'une altération ultérieure d'anciens monuments construits en calcaire tendre; ce même badigeonnage pourra devenir d'une application générale dans les contrées où, comme en Champagne, la craie forme presque l'unique matière applicable aux constructions.

» Le plâtre subit des transformations analogues à celles de la craie; l'action du silicate alcalin est même plus énergique; aussi convient-il d'opérer au moyen de dissolutions faibles, pour pénétrer convenablement de silice les objets en plâtre moulé, et mieux de gâcher tout d'abord le plâtre avec une dissolution de silicate de potasse. Les carbonates de baryte, de strontiane, d'oxide de plomb, etc., peuvent subir une silicatisation analogue à celle de la craie. La pâte obtenue en pétrissant de la céruse en poudre avec une dissolution de silicate de potasse ou de soude prend une grande dureté, et présente un beau poli. Envisageant ces différentes questions sous le point de vue théorique, M. Kuhlmann établit qu'un grand nombre d'oxides peuvent se combiner avec la chaux, et que cette dernière

enlève entièrement l'acide silicique au silicate de potasse en dissolution dans l'eau; qu'une dissolution ammoniacale d'oxide de cuivre étant mise en contact avec la chaux délitée, il se forme un cuprate de chaux dont l'existence donne la clé de la théorie de la formation des cendrés bleues. Quant à la réaction du silicate de potasse sur la craie et d'autres carbonates, cette réaction, cet échange partiel des acides, qui a lieu par le contact d'un sel dissous avec un sel réputé insoluble, se produit dans un grand nombre de circonstances; ils dérivent d'une loi commune qui n'est qu'une extension des lois de Berthollet, applicable aux sels insolubles proprement dits, dans l'eau ou dans les dissolutions réagissantes, et qui tend à faire tenir compte dans la réaction des sels les uns sur les autres, des différents degrés d'insolubilité. Ainsi, toutes les fois qu'on met en contact un sel insoluble avec la dissolution d'un sel dont l'acide peut former, avec la base du sel insoluble, un sel plus insoluble encore, il y a échange; mais le plus souvent cet échange n'est que partiel, et dans beaucoup de circonstances il doit se former des sels doubles. Pour avoir un exemple de la loi ci-dessus énoncée, il suffit de savoir que le carbonate de potasse transforme le plâtre en carbonate de chaux; que le chromate de potasse convertit en partie le carbonate de chaux en chromate de chaux, et que ce dernier passe en partie à l'état de silicate de chaux lorsqu'on le met en contact avec le silicate de potasse.

Formation naturelle des espèces minérales par la voie humide.

» Mes essais, dit M. Kuhlmann, tendent à prouver que le silicate de chaux qui accompagne les craies n'a d'autre origine que celle résultant d'une infiltration de silicate de potasse ou de soude à l'état de dissolution dans l'eau; la présence d'un peu de potasse que j'ai trouvée dans la craie, comme aussi la conformation des veines de silicate de chaux qui traversent les craies en tout sens, donnent un grand poids à cette opinion.

» Il restait un point important à décider : comment doit-on envisager l'action de l'air dans le durcissement des calcaires siliceux ou artificiels, et par suite d'une partie de ceux naturels, en adoptant ces explications de leur formation. Il est évident que le silicate de chaux présentant un état gélatineux au moment de sa production, la craie imprégnée ou injectée de ce silicate ne peut acquérir de dureté que par le retrait que doit prendre ce dernier par dessiccation ou par une combinaison plus intime; mais cette cause, qui explique d'une manière satisfaisante la cause des durcissements des calcaires tendres par leur exposition à l'air après leur extraction, n'est pas la seule qui intervienne dans le durcissement artificiel des craies. L'a-

cide carbonique de l'air détermine lentement la décomposition du silicate de potasse qui a échappé à la réaction et qui est resté engagé dans la pierre artificielle. Ainsi se justifie encore la présence dans la masse calcaire d'un dépôt siliceux susceptible d'en augmenter la dureté.

» En réfléchissant à cette admirable réaction, n'est-on pas conduit naturellement, dit l'auteur, à attribuer non-seulement toutes les infiltrations et les cristallisations de silice dans les roches calcaires, mais encore la formation d'une infinité de pâtes siliceuses et alumineuses naturelles, à des réactions analogues. N'est-on pas conduit à admettre que le silex pyromaque, les agates, les bois pétrifiés et autres infiltrations siliceuses n'ont pas eu d'autre origine; qu'ils doivent leur formation à la décomposition lente du silicate alcalin par l'acide carbonique. C'est là une question qui est appelée à jeter une vive lumière sur l'histoire naturelle du globe, et qui paraît presque amenée à un état de démonstration par la présence de la potasse que j'ai trouvée en petite quantité dans différentes pierres siliceuses, telles que le silex pyromaque, l'opale de Castellamonte, etc.

» La potasse et la soude n'ont donc pas été étrangères à la formation de la plupart des roches siliceuses, et sans doute aussi des roches alumineuses. Mes expériences, dit M. Kulhmann, paraissent de nature à faire cesser toute incertitude sur ce point, et bientôt une théorie régulière et admise par tous remplacera des hypothèses plus ou moins hasardées. On arrivera à reconnaître avec moi que la formation de beaucoup de ces roches repose:

» 1°. Sur la décomposition des carbonates de chaux, de magnésie, etc., par le silicate de potasse ou de soude, donnant lieu à des silicates de chaux ou de magnésie, lesquels, par l'action lente des eaux chargées d'acide carbonique, perdent, dans quelques circonstances, l'élément calcaire ou magnésien;

» 2°. Sur la formation directe de pâtes siliceuses par décomposition lente, au contact de l'acide carbonique de l'air, des silicates alcalins dissous dans l'eau.

» Dans le cours de mes expériences, j'ai reconnu que le manganésiate alcalin joue un rôle analogue au silicate et à l'aluminate. L'acide carbonique de l'air détermine également la décomposition de ce sel. Cette analogie conduit à attribuer la formation de beaucoup de roches manganésiennes à une origine pareille. L'analogie m'a paru plus frappante encore en constatant, par plusieurs essais, que le peroxide de manganèse cristallisé naturel, retient souvent un peu d'alcali; et aujourd'hui que nous savons qu'il existe un composé correspondant au manganésiate de potasse, dans le-

quel l'oxide de fer joue le rôle d'acide, il n'est pas indifférent de rechercher si la théorie de la décomposition du chlorure de fer est la seule manière d'expliquer la formation du fer oligiste ; si la formation de cet oxide naturel ne se rattache pas à des réactions de la nature de celles que je viens de signaler : j'ai trouvé des traces de potasse dans le fer oligiste de l'île d'Elbe.

» Enfin, la potasse ou la soude paraissant avoir présidé à une grande partie des formations par la voie humide, il conviendra de rechercher ces alcalis dans toutes les espèces minérales appartenant à des métaux dont les oxides peuvent jouer le rôle d'acide. Il ne sera pas difficile ainsi de se rendre compte de la formation du silicate de zinc, de l'oxide d'étain natif, etc.

» Et si nous tenons compte de l'action des sels solubles sur les sels insolubles, et si nous recherchons un autre dissolvant dans les bicarbonates alcalins ou dans l'eau chargée d'acide carbonique, nous arriverons à d'autres faits très nombreux qui viendront corroborer ces idées théoriques sur la formation des roches par la voie humide. Ainsi, divers résultats me portent à admettre que des sulfates, des phosphates, des arséniates, des fluorures, des chlorures, des sulfures, etc., ont pu être produits par la réaction des sels à base alcaline sur les carbonates ou sulfates terreux, comme aussi nous pouvons nous rendre compte de la formation de calcaires compactes par infiltrations dans les craies, de dissolutions de carbonate de chaux en faveur d'un excès d'acide carbonique ; et si nous supposons que la matière injectée dans la craie soit du carbonate de magnésie, nous arrivons à la formation de certaines dolomies.

» M. Kuhlmann termine son travail en faisant pressentir les nombreuses applications industrielles auxquelles l'injection artificielle des substances minérales dans l'intérieur des corps poreux peut donner lieu, soit qu'on opère sur les matières organiques ou les matières inorganiques. »

Après la lecture du Mémoire de M. *Kuhlmann*, M. **Dumas** prend la parole pour déclarer à l'Académie que les faits importants que ce Mémoire renferme, lui avaient été communiqués par l'auteur, il y a plusieurs mois.

(Pièces de la séance du 5 mai.)

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

CHIRURGIE. — *Des brides ou barrières à l'orifice interne de l'urètre; par* M. CIVIALE. (Extrait par l'auteur.)

(Commissaires, MM. Larrey, Breschet.)

« On trouve souvent, chez les vieillards surtout, une déformation considérable de l'orifice interne de l'urètre, résultant de divers états morbides de la prostate, et aussi d'une saillie semilunaire, s'élevant de la face inférieure du col vésical, et constituant une sorte d'écluse ou de barrière qui gêne la sortie de l'urine et met obstacle à l'introduction des instruments. Cette disposition, dont les auteurs se sont à peine occupés, mérite d'autant plus de fixer l'attention, qu'elle exerce une grande influence sur les maladies de l'appareil urinaire.

» Cette espèce de barrière affecte trois formes différentes : chez certains sujets il n'y a qu'un simple repli membraneux, mince, lisse et presque transparent, qui s'étend d'un lobe latéral de la prostate à celui du côté opposé. Dans d'autres cas plus rares, le bord libre du repli affecte la forme d'un cordon arrondi, qui semble avoir, en se tendant, soulevé la membrane muqueuse, dont les deux feuillets adossés donnent naissance à la soupape ou valvule. Celle-ci est plus épaisse que dans le cas précédent, et l'on découvre entre les deux lames qui la constituent, un tissu dense, analogue à celui du sphincter vésical qu'on a considéré tantôt comme scléreux, et tantôt comme musculeux. Ailleurs enfin l'éperon a plus d'épaisseur encore. Son bord libre est moins résistant; parfois même il est frangé, festonné, chargé d'excroissances ou de saillies qui séparent des espèces de sillons. Il s'agit, dans ce dernier cas, d'une fongosité ou d'un mode spécial de gonflement prostatique qui, au lieu d'une masse arrrondie, produit une tumeur aplatie d'avant en arrière. Ces trois sortes de brides peuvent exister isolément ou se trouver réunies chez un même sujet.

» La hauteur de cette barrière varie beaucoup. Je l'ai trouvée haute de 9 à 12 lignes chez divers sujets. Ordinairement elle fait moins de saillie,

souvent même elle ne produit une véritable cloison que quand on écarte l'un de l'autre les lobes latéraux de la prostate. Du côté de l'urètre la face de la valvule est à pic, tandis que du côté de la vessie elle s'abaisse par une gradation insensible

» Ces sortes de brides ont le plus communément une direction transversale et s'étendant d'un lobe latéral de la prostate à celui du côté opposé; mais elles peuvent affecter d'autres directions relatives au siége des tuméfactions partielles de la prostate.

» Les désordres que ces états morbides apportent à l'expulsion de l'urine sont très variables, mais ils ne diffèrent pas notablement de ceux qu'entraînent d'autres maladies du col vésical. Ce n'est donc pas par des symptômes spéciaux qu'on peut espérer de les reconnaître. On ne parvient à établir un diagnostic rigoureux qu'au moyen d'explorations particulières, et avec des instruments que j'ai fait connaître et dont l'expérience m'a plus d'une fois démontré l'utilité : quant au traitement, il est du ressort exclusif de la chirurgie. Il consiste à diviser la barrière, tantôt en procédant du bord libre vers sa base, et tantôt en pratiquant une ponction au niveau du point où la bride prend naissance et prolongeant la section jusqu'au bord libre. J'ai mis sous les yeux de l'Académie les instruments à l'aide desquels on pratique cette opération, qui a très bien réussi sur deux malades. »

PHYSIOLOGIE. — *Recherches anatomiques et expérimentales sur les nerfs du larynx et sur le nerf accessoire de Willis; par* M. LONGET.

(Commissaires, MM. de Blainville, Flourens, Breschet.)

L'auteur a accompagné son Mémoire de la lettre suivante, qui donne une idée des résultats qu'il croit avoir constatés par ses expériences.

« Dans des dissections assez nombreuses sur l'homme, le chien et le cheval, j'ai constamment vu le nerf récurrent envoyer au muscle arythénoïdien un filet considérable, filet qui, d'ailleurs, avait été déjà signalé par d'autres anatomistes; d'où il faut conclure que le récurrent fournit des rameaux non-seulement aux muscles dilatateurs de la glotte, mais aussi à son contricteur le plus puissant (l'arythénoïdien). Quant au prétendu rameau que le laryngé supérieur donnerait à ce muscle, je ne l'ai jamais vu s'arrêter dans l'épaisseur de celui-ci, et il m'a toujours paru traverser l'arythénoïdien pour se rendre à la muqueuse qui tapisse sa face antérieure. Mais ce que l'observation anatomique m'avait démontré, j'ai voulu le con-

firmer encore par l'*expérimentation* : à cet effet, j'ai d'abord employé le galvanisme.

» J'enlève donc, avec célérité, le larynx sur un chien vivant, et j'applique les deux pôles d'une pile (10 couples, 11 cent. carrés) au laryngé supérieur; *le muscle arythénoïdien n'éprouve jamais la moindre contraction;* au contraire, les secousses convulsives les plus violentes s'observent dans ce muscle et dans tous les autres muscles laryngés (1), quand on galvanise les récurrents.

» L'anatomie et les épreuves avec le galvanisme s'accordent donc pour démontrer que le laryngé supérieur est le nerf moteur du larynx, et que s'il fournit aux muscles dilatateurs de la glotte, il donne aussi des filets à son muscle essentiellement constricteur (c'est-à-dire le muscle arythénoïdien).

» Le nerf laryngé supérieur proprement dit (j'excepte le rameau laryngé externe), est le nerf qui donne à la muqueuse laryngienne l'exquise sensibilité dont elle jouit, et il est impropre à faire contracter le muscle arythénoïdien.

» Dans plus de *vingt* expériences, les tons les plus aigus ont continué de se produire après la section des nerfs laryngés supérieurs.

» Voici quelques expériences que j'ai exécutées pour m'assurer de l'action des nerfs récurrents sur les mouvements de la glotte.

» Je divise la membrane thyro-hyoïdienne avec les deux nerfs laryngés supérieurs (chiens), et je renverse le larynx au-devant du cou de l'animal pour observer les mouvements de la glotte : celle-ci conserve tous ses mouvements; elle se dilate pendant l'inspiration, et se resserre pendant l'expiration. Si je pince fortement la queue de l'animal, les tons les plus aigus se font entendre, et la glotte se resserre alors très énergiquement par l'action du muscle arythénoïdien, dont la contraction n'est donc pas soumise aux laryngés supérieurs.

» Mais alors si, après avoir constaté les dimensions normales de la glotte pendant une inspiration, je coupe l'un des nerfs récurrents, cette ouverture diminue immédiatement de moitié; elle se ferme complétement ou à peu près, selon l'âge des animaux, après que la section des deux récurrents a été opérée. Puisque les deux laryngés supérieurs n'existent plus, on ne saurait donc les regarder comme les agents nerveux qui président à cette

---

(1) Excepté le crico-thyroïdien.

occlusion. Les phénomènes sont les mêmes quand on coupe seulement les deux récurrents, et qu'on laisse intacts les deux laryngés supérieurs. Mais dans la première expérience, ce qui frappe surtout l'observateur, c'est que pendant l'inspiration et l'expiration, les mouvements de la glotte se produisent dans un ordre inverse de celui dans lequel ils ont lieu à l'état normal; du reste, l'explication de ce fait physiologique nous paraît facile. En effet, le vide tend à se former, lors de l'inspiration, et de même qu'alors on voit, dans l'hémiplégie faciale, l'aile du nez s'appliquer à la cloison médiane, de même on doit voir aussi, dans l'inspiration, les deux lèvres de la glotte tendre à se rapprocher, tandis qu'elles s'écarteront nécessairement pour livrer passage à la colonne d'air expiré, quand le mouvement expiratoire aura lieu.

» Je n'entrerai point ici dans le détail des expériences que j'ai faites sur le nerf accessoire de Willis; elles sont consignées dans mon Mémoire. Je me permettrai seulement une remarque sur l'origine toute particulière et pour ainsi dire exceptionnelle de ce nerf, origine qui, comme on le sait, a beaucoup exercé la sagacité des anatomistes. Selon moi, ce nerf naît des faisceaux de la moelle cervicale *dans une étendue* de plusieurs pouces (et non de quelques lignes, comme les autres nerfs céphalo-rachidiens), parce qu'il a mission de présider à des mouvements sans lesquels la vie serait impossible, tels que ceux de la glotte, du pharynx, de l'œsophage, de l'estomac. En effet, s'il eût tiré son origine d'un point limité de l'axe cérébro-spinal, il eût suffi d'une lésion de ce point originel pour compromettre immédiatement l'existence de l'individu, tandis que, grâce à la disposition que nous venons de signaler, il faut, pour abolir l'action de ce nerf, une lésion beaucoup plus étendue. »

CHIRURGIE. — *Recherches sur quelques variétés du bégaiement et sur un nouveau procédé opératoire; par* M. **J.-E. Pétrequin**.

(Commission du bégaiement.)

« Le bégaiement, dit M. Pétrequin, peut tenir à des causes très différentes. Dans certains cas il est le résultat d'une affection cérébrale incurable, et par conséquent il n'est pas lui-même susceptible de traitement. Dans d'autres cas il tient principalement à un état de spasme des muscles extrinsèques du larynx et de l'appareil respiratoire, et, quoique certaines méthodes de traitement puissent alors être suivies de succès, en général

on retirera peu d'avantages de la ténotomie sublinguale. Souvent enfin le bégaiement tient à des causes qu'une opération chirurgicale peut faire disparaître; mais cette opération ne sera pas toujours la même, puisqu'elle devra être dirigée contre des conformations vicieuses de la langue différentes les unes des autres, quoique ayant toutes pour résultat d'embarrasser la parole.

» Des différents procédés auxquels il conviendra d'avoir recours suivant les variétés de bégaiement que l'on aura à combattre, je ne décrirai aujourd'hui que celui qui a rapport à la section des génio-glosses.

» *Disposition anatomique*. L'anatomie chirurgicale de cette région montre que c'est en avant, vers le maxillaire, que les génio-glosses sont le plus facilement et le plus complétement attaquables. On trouve successivement la pointe antérieure du filet, la muqueuse buccale, une couche variable de tissu cellulaire, et une gaîne spéciale dont je parlerai plus loin. Telle est l'*anatomie des plans*. Au-dessous, les génio-glosses, en convergeant vers les apophyses génies supérieures, sont d'abord séparés par une cloison celluleuse mince, finissent par dégénérer en tissu fibreux, et s'insèrent par leurs tendons réunis aux éminences précitées. Cette double expansion fibreuse est assez étroite. D'ailleurs la hauteur de la mâchoire elle-même est très variable suivant les individus, de même que la profondeur et la saillie des apophyses (on s'en assure par le mode d'exploration que j'indique ci-dessous). A partir de ce point, le muscle s'élargit en gagnant la langue, et il est bientôt recouvert par un appendice de la glande sublinguale dont je crois utile d'éviter la lésion. Les deux génio-glosses sont en outre enveloppés dans une gaîne cellulo-fibreuse qui les isole des organes voisins, s'insère autour de leur propre insertion, et les sépare des génio-hyoïdiens, dont l'implantation au maxillaire a lieu immédiatement au-dessous. Les artères sublinguales sont à distance.

» *Procédé opératoire*. Je fixe un bouchon entre les arcades dentaires du côté droit. J'explore ensuite la région buccale; avec le pouce gauche placé sous la base de la mâchoire je reconnais les apophyses génies inférieures, tandis que, avec l'indicateur de la même main introduit dans la bouche, je distingue les supérieures, et mesure ainsi entre mes deux doigts la distance et la forme des organes. C'est un point de ralliement fixe qui régularise l'opération, en l'empêchant de rester en-deçà ou d'aller au-delà, circonstance importante pour prévenir les accidents consécutifs, inflammatoires et hémorragiques.

» Cela fait, j'enfonce, à gauche, à 4 millimètres également du frein et du maxillaire, un bistouri à deux tranchants qui pénètre à la profondeur de 10 à 12 millimètres dans la gaîne propre des génio-glosses. J'engage aussitôt dans l'ouverture un crochet mousse particulier qui, par un mouvement de bascule, me sert à embrasser et à tendre l'un et l'autre muscle dont je coupe le tendon avec des ciseaux courbes sur le plat, en rasant la face postérieure de la mâchoire La section est instantanée; et le crochet dégagé (comme la canule dans la fistule à l'anus) témoigne que l'opération est complète: elle porte sur tout le génio-glosse, et ne porte que sur lui, sans pouvoir se fourvoyer; car on a un guide sûr dans le crochet mousse, dont l'introduction est rendue simple et facile par l'exploration indiquée.

» Je l'ai fait confectionner avec une double courbure: la première porte exclusivement sur la pointe de l'instrument qu'elle constitue en crochet avec un bec proportionné à la largeur des deux faisceaux moléculaires dans ce point; la deuxième porte sur la tige, de manière que, une fois en place, sa convexité regarde la cavité buccale, et que sa concavité favorise le jeu des ciseaux entre elle et le corps de l'os. Le but à remplir rend compte du moyen que j'ai employé.

» L'exécution du procédé est sûre et rapide; les apophyses génies supérieures se trouvent dénudées en quelques secondes; on évite l'extrémité des glandes sublinguales, on reste en dedans des artères du même nom; la division des génio-glosses, ne portant que sur leur expansion tendineuse, enlève jusqu'aux chances d'hémorragie provenant des artères nourricières du muscle; et j'ai eu si peu de sang, qu'il n'a pas été nécessaire de s'en occuper; je n'ai pas eu besoin de recourir au tamponnement. L'opération est peu douloureuse; et l'on peut à l'instant s'assurer qu'elle est entière et complète, en introduisant le doigt dans la plaie où les apophyses génies sont libres et dépouillées. »

CHIRURGIE. — *Nouveau procédé pour l'opération du strabisme; par* M. **Colson**, de Noyon.

(Commission du strabisme.)

M. **Rossignon** adresse une Note ayant pour titre : *Transformation de la cellulose en amidon et de l'amidon en cellulose.*

(Commissaires, MM. Thenard, Pelouze.)

M. Gaubert prie l'Académie de vouloir bien charger une Commission d'examiner une machine typographique de son invention. Cette machine, qu'il désigne sous le nom de *Chérotype*, doit servir à la fois à rendre la composition très rapide et à distribuer mécaniquement les caractères lorsque le tirage est terminé.

(Commissaires, MM. Arago, Coriolis, Gambey, Piobert et Séguier.)

M. Fusz soumet au jugement de l'Académie une nouvelle modification qu'il vient d'apporter à son système de *ressorts à doubles pincettes*.

(Commissaires, MM. Piobert, Séguier.)

M. Papanti adresse une Note écrite en italien sur un appareil qui est mis en mouvement par l'échauffement d'une portion de l'air contenu dans les cavités qu'il présente.

(Commissaires, MM. Gambey, Poncelet, Séguier.)

CORRESPONDANCE.

M. le Ministre de l'Instruction publique transmet ampliation de l'Ordonnance royale qui confirme la nomination de M. **Despretz** à la place vacante, dans la section de Physique, par suite de la mort de M. *Savart*.

M. Despretz est invité à prendre place parmi les membres.

M. le Ministre de l'Instruction publique demande s'il a été fait un Rapport sur la méthode de traitement proposée par M. Ducros pour la surdimutité; en supposant que ce rapport ait été déjà fait, M. le Ministre invite l'Académie à lui en donner communication, afin qu'il soit statué sur la demande faite par ce médecin de traiter, d'après la méthode indiquée, quelques élèves de l'Institution royale des sourds-muets de Paris.

La lettre de M. le Ministre est renvoyée à la Commission chargée de l'examen du Mémoire de M. Ducros.

PHYSIQUE. — *Application des propriétés des rayons continuateurs aux opérations de la photographie.* — Lettre de M. **Gaudin** à M. *Becquerel*.

« J'ai le plaisir de vous annoncer que la découverte de M. Edmond Becquerel, concernant l'action photographique des rayons rouges, si bien

prouvée déjà par le Rapport de M. Biot, s'applique parfaitement au procédé de M. Daguerre, comme vous pourrez en juger par les échantillons que je joins à ma lettre.

» M. Séguier avait déjà obtenu quelques résultats concluants; malheureusement il avait opéré à la lumière diffuse, comme je l'avais fait moi-même une fois sans succès; tandis qu'il faut faire arriver les rayons directs du soleil sur le verre pendant 10 minutes, plus ou moins, selon l'intensité présumée de l'épreuve que l'on veut continuer. MM. Buron et Lerebours avaient obtenu, avant que je fisse mes recherches, des résultats très remarquables avec le soleil direct; mais aujourd'hui je ne doute plus qu'à l'aide de l'illumination rouge nous ne puissions opérer instantanément, car je vous envoie déjà des nuages obtenus *par un grand vent, près le zénith, en une demi-seconde.* Ainsi désormais les épreuves photographiques vont présenter la vie et le mouvement qui leur manquaient.

» En garnissant les appareils à mercure de verres rouges, on pourra s'en servir en plein air. Je crois aussi que la faculté que l'on aura *d'observer l'action du verre rouge, et de l'activer en certains points au moyen d'un verre ardent,* permettront d'obtenir des épreuves plus complètes.

» Pour réussir avec le verre rouge, il faut préparer les plaques *avec un soin infini, l'insolation rouge mettant en évidence toutes les négligences* si funestes aux noirs et aux demi-teintes, d'autant plus encore que cette action semble donner des chairs noires irisées dont on n'aperçoit bien le modelé que sous un certain angle oblique, comme on s'en convaincra en observant la plupart de mes échantillons. »

ZOOLOGIE. — *Observation relative à la Tubulaire sultane.*

M. **Coste** adresse la note suivante, comme complément à sa précédente communication sur les Polypes fluviatiles.

« La *Tubulaire sultane* est un animal dont toute l'organisation est, en général, conforme à celle des Polypes à panache en forme de fer à cheval, mais qui semble en différer cependant par l'absence complète *des deux bras*, ou des deux branches du fer à cheval sur lesquels les tentacules de ces mêmes polypes sont implantés.

» En étudiant avec attention l'organisation de la *Tubulaire sultane*, j'ai observé une disposition anatomique particulière qui donne la preuve de l'existence, chez cet animal, de bras rudimentaires, et qui permet, par conséquent, d'en faire la *transition naturelle entre les polypes à panache en fer à cheval, et les polypes infundibuliformes.* »

PHYSIOLOGIE ANIMALE. — *Observations sur une fistule aérienne, avec occlusion complète de la partie inférieure du larynx, pour servir à l'histoire de la phonation; par* M. **Reynaud**, premier chirurgien en chef de la marine au port de Toulon.

Cette observation a été recueillie sur un forçat du bagne de Toulon nommé Leblanc, lequel, dans un moment de désespoir, s'était coupé la trachée-artère avec un instrument tranchant, et chez lequel la cicatrisation de la plaie fut suivie de l'obturation complète de la partie inférieure du larynx.

L'auteur donne l'historique des expériences qui furent faites en présence des professeurs de l'École de Médecine de Toulon, pour constater cette obturation.

« Toutes ces expériences, dit-il, ont le même résultat et nous confirment dans l'opinion qu'il n'existe plus aucune communication entre le larynx et la trachée-artère. Nous sommes dès-lors convaincus que la parole a lieu chez Leblanc sans l'intervention de l'air sorti des poumons, puisque ces organes n'ont plus aucune communication avec le larynx et la bouche. Cependant cet homme peut parler assez distinctement et de manière à être entendu à quelque distance. Il m'a fourni lui-même le détail de tous les évènements qui ont eu lieu depuis sa fuite jusqu'à son arrivée à Toulon, assis à côté de mon bureau, la bouche placée à environ quatre pieds de mon oreille droite. Souvent j'ai été obligé de lui faire répéter des mots pour les bien comprendre. Quelquefois il a éprouvé beaucoup de difficulté pour prononcer certaines syllabes, et alors il m'a transcrit le mot qu'il n'a pu me faire entendre.

» Leblanc peut prononcer assez distinctement les lettres B, C, D, F, G, H, I, J, K, P, Q, R, S, T, U, V, X, Y, Z.

» Il éprouve beaucoup de difficulté pour prononcer les lettres A, E, L, et surtout la lettre O; on voit alors qu'il est obligé de faire des efforts considérables.

» Il lui est impossible de prononcer les lettres M, N.

» Lorsqu'il veut parler, il ouvre la bouche, il abaisse le pharynx, et, après avoir rempli d'air le tuyau vocal, il élève brusquement le larynx et parle par secousses comme s'il crachottait, et en mettant toujours un peu d'intervalle entre la prononciation de chaque mot. La prononciation n'est point nette; cependant on l'entend assez distinctement. Les efforts qu'il est obligé de faire pour parler le fatiguent; il ne peut soutenir une longue conversa-

tion sans se reposer. Lorsqu'il parle longtemps sa face se colore, ce qui annonce que, pendant cet acte, la respiration est gênée.

» Leblanc peut siffler, mais il est obligé de faire de plus grands efforts que pour parler. Il ne peut point siffler longtemps, et il est obligé d'élever fortement le larynx.

» Il peut se moucher; pour opérer l'expulsion du mucus nasal, il remplit le tuyau vocal d'air, ferme la bouche, il élève le larynx, et fait sortir l'eau et les mucosités par les ouvertures antérieures des fosses nasales.

» Pour cracher, il ferme la bouche, élève brusquement le larynx, au même instant, ouvre légèrement la bouche pour donner issue à la salive.

» Lorsqu'il sent le besoin d'éternuer, il ferme la bouche, élève le larynx, et l'air, contenu dans le tuyau vocal, sort par les fosses nasales.

» Lorsqu'il veut se débarrasser des mucosités bronchiques, il retire le tuyau de plomb, et ce n'est qu'après plusieurs mouvements d'expiration qu'il vient à bout de les expulser.

» Leblanc peut parler, quoique avec plus de difficulté, quand les ouvertures antérieures des fosses nasales sont fermées.

» Nous avons ensuite examiné la cloison qui obture complétement le larynx au-dessous du cartilage thyroïde : elle est oblique de haut en bas, et d'arrière en avant. Elle nous a paru formée, dans ses deux tiers antérieurs, par les téguments, et dans son tiers postérieur par la face antérieure du pharynx, qui est venu, pour ainsi dire, à la rencontre de ces derniers. L'ouverture fistuleuse a environ de 8 à 9 lignes de diamètre.

» La pièce pathologique a été disséquée par MM. les membres de la Commission, conjointement avec mon collègue M. Laurent, second chirurgien en chef de la marine à Cherbourg, et ces messieurs ont reconnu l'occlusion complète du larynx.

» Maintenant le point principal est de savoir comment Leblanc jouissait de la faculté de parler, malgré l'occlusion complète de l'ouverture inférieure du larynx. Est-ce par le courant d'air établi entre les fosses nasales, le pharynx et la bouche? Le larynx, dont les cordes vocales et les ventricules sont intacts, coopérait-il à l'articulation des sons? Si j'avais à émettre une opinion, j'adopterais de préférence la première; mais je me borne à exposer ce que j'ai observé. Je pense que les physiologistes qui s'occupent spécialement de la phonation, y trouveront des matériaux qui pourront leur faire apporter des modifications importantes à la théorie de cette fonction. »

M. Laurent, en adressant à l'Académie le Mémoire de M. *Reynaud*, ajoute ce qui suit :

« L'homme atteint de cette fistule aérienne avait passé des salles de M. Reynaud dans mon service chirurgical, où il est mort après six mois de séjour. Je puis affirmer que cet homme ne respirait que par la fistule aérienne, et ne parlait qu'au moyen de l'air introduit dans les cavités buccale et nasale.

» Dès que le cas de possibilité de la parole sans voix laryngée avait été connu dans l'École de Médecine de Toulon, M. Reynaud s'était attaché à bien démontrer devant tous les professeurs réunis la non-communication de la bouche et du larynx avec la trachée-artère. »

M. Pionnier demande l'autorisation de reprendre un paquet cacheté qu'il avait déposé en date du 11 novembre 1839, et qui portait pour suscription : « Moyen destiné à empêcher les navires de sombrer sous voile et de se briser contre les rochers. »

L'autorisation demandée est accordée.

M. Pétrequin adresse un paquet cacheté; l'Académie en accepte le dépôt.

Le défaut de temps oblige à renvoyer la lecture de la correspondance du 10 mai à la séance suivante.

La séance est levée à 5 heures. F.

ERRATUM. (Séance du 5 mai 1841.)

Page 795, ligne 5, *au lieu de* 13 septembre, *lisez* 13 novembre.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

L'Académie a reçu dans cette séance les ouvrages dont voici les titres :

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie royale des Sciences; 1er semestre 1841, n° 18, in-4°.

Historique de la fabrication des Tam-Tams et des Cymbales en France; par M. D'ARCET. (Extr. du *Recueil de la Société polytechnique*, avril 1841.) In-8°.

Suite des Mémoires et Observations de Physique et d'Histoire naturelle; par M. le baron D'HOMBRES-FIRMAS; in-8°.

Voyage dans l'Inde, par M. V. JACQUEMONT, *pendant les années* 1828-1832; livraisons 31 et 32, in-4°.

Traité pratique sur les maladies des Organes génito-urinaires; par M. CIVIALE; 2e partie, 1 vol. in-8°.

OEuvres complètes de John Hunter, *traduites de l'anglais par* M. RICHELOT; 13 liv. in-8°, et atlas in-fol.

Recherches sur le Système nerveux; par M. LONGET; 1841, in-8°.

Mémoires de la Société royale des Sciences, Lettres et Arts de Nancy; 1839, in-8°.

Métrologie française, ou Manuel théorique et pratique du Système métrique; par M. J.-B. SOUQUET; Toulouse, 1840, in-8°.

Précis sur les causes du Bégaiement et sur les moyens de le guérir; par M. MALLEBOUCHE; in-8°.

Problème social résolu mathématiquement; par M. DANRÉ DE COYOLLES; 1840, in-8°.

Mécanisme pour faire remonter des rivières à des mobiles avec la seule force de projection de l'eau de ces rivières; par M. LAURENT; Nancy, in-8°.

Bulletin de l'Académie royale de Médecine; tome VI, n°s 13 et 14; in-8°.

Traité de Pathologie iatrique ou médicale et de Médecine piatrique; par M. PIORRY; 5e livraison, in-8°.

Revue zoologique; par la Société cuviérienne; n° 4, in-8°.

Journal des Connaissances médico-chirurgicales; mai 1841, in-8°.

Journal d'Agriculture pratique; avril 1841, in-8°.

Appendice à la brochure intitulée : Système complétement neuf de classification du Règne animal; *par* M. CH. DE PERRON; demi-feuille in-8°.

Bruchstücke... *Fragments d'une Faune de Barbarie, avec des considérations particulières sur la diffusion géographique des animaux, d'après les matériaux recueillis dans la régence d'Alger; par* M. MORITZ-WAGNER (formant le tome IIIe du voyage). Leipsig, 1841, in-8°, avec atlas in-4°. (M. Isidore Geoffroy est chargé de rendre un compte verbal de cet ouvrage.)

Gazette médicale de Paris; tome IX, n° 19, in-4°.

Gazette des Hôpitaux; n°s 56 et 57.

L'Expérience, journal de Médecine; n° 201, in-8°

La France industrielle; jeudi 6 mai 1841.

OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES. — AVRIL 1841.

Jours du mois.	9 HEURES DU MATIN. Barom. à 0°.	Therm. extér.	Hygrom.	MIDI. Barom. à 0°.	Therm. extér.	Hygrom.	3 HEURES DU SOIR. Barom. à 0°.	Therm. extér.	Hygrom.	9 HEURES DU SOIR. Barom. à 0°.	Therm. extér.	Hygrom.	THERMOMÈTRE. Maxim.	Minim.	ÉTAT du ciel à midi.	VENTS à midi.
1	750,00	+ 6,2		749,76	+ 9,2		749,53	+10,2		750,77	+ 7,5		+10,3	+ 5,0	Quelques éclaircies.....	O.
2	746,80	+ 9,2		747,18	+11,0		748,55	+11,3		751,28	+ 7,3		+11,8	+ 6,5	Couvert...............	N. O.
3	751,05	+ 8,0		749,40	+11,6		746,79	+11,4		746,47	+ 8,4		+12,7	+ 1,9	Quelques éclaircies......	S.
4	749,86	+ 8,6		749,61	+11,4		748,71	+11,4		747,36	+ 7,4		+13,5	+ 5,0	Quelques nuages........	O. N. O.
5	743,94	+ 6,9		743,68	+ 9,2		743,14	+ 9,0		744,08	+ 6,8		+11,1	+ 5,0	Couvert..............	S. E.
6	747,29	+ 7,3		747,42	+11,4		747,60	+12,1		750,05	+ 7,4		+12,3	+ 2,7	Très nuageux..........	N. N. E.
7	751,43	+ 3,7		751,76	+ 5,6		751,04	+10,4		751,86	+ 6,6		+10,9	+ 1,4	Couvert...............	N.
8	752,84	+ 6,4		753,17	+ 8,6		752,94	+10,5		754,28	+ 6,5		+10,8	+ 1,9	Pluie.................	S. O.
9	755,04	+ 8,2		754,99	+ 9,1		754,21	+ 9,8		754,48	+ 3,3		+10,0	+ 4,5	Couvert...............	O.
10	754,02	+ 6,9		757,34	+ 8,4		756,77	+ 8,8		756,40	+ 7,2		+ 9,9	+ 3,0	Couvert...............	N.
11	753,97	+ 7,0		753,11	+ 7,9		752,57	+ 7,5		752,67	+ 4,2		+ 8,3	+ 4,0	Couvert...............	N. E.
12	752,35	+ 4,9		752,63	+ 4,6		752,90	+ 5,3		755,48	+ 3,2		+ 6,8	+ 2,2	Neige fine............	N. O.
13	759,61	+ 3,1		760,91	+ 7,3		761,25	+ 9,2		762,38	+ 7,1		+10,0	+ 0,8	Très nuageux..........	N. O.
14	762,84	+ 8,0		762,34	+ 8,8		762,15	+ 9,9		759,91	+ 8,4		+10,1	+ 5,1	Pluie.................	S. O.
15	755,15	+ 9,5		753,91	+ 7,2		753,04	+ 8,2		752,84	+ 6,2		+10,0	+ 6,8	Pluie.................	S. O.
16	751,22	+10,3		750,60	+ 8,8		750,10	+10,3		750,74	+ 6,7		+11,6	+ 1,8	Pluie par moments......	O. S. O.
17	754,03	+ 8,7		753,71	+12,0		754,17	+12,2		756,75	+ 7,9		+12,7	+ 2,5	Nuageux..............	N.
18	759,64	+ 9,8		759,01	+14,0		758,51	+14,8		758,50	+11,7		+15,9	+ 2,4	Vaporeux..............	O.
19	756,16	+10,5		754,72	+12,4		755,24	+12,5		756,46	+ 7,0		+14,1	+ 7,8	Couvert...............	O.
20	752,81	+ 8,7		751,11	+11,6		749,11	+12,6		747,51	+10,1		+13,1	+ 2,3	Couvert...............	S. O.
21	746,73	+ 7,8		746,61	+10,0		746,90	+ 9,8		747,69	+ 9,3		+10,0	+ 6,2	Pluie.................	E. N. E.
22	748,08	+12,2		747,29	+16,8		746,69	+17,4		746,59	+12,5		+19,2	+ 8,2	Couvert...............	N. E.
23	748,00	+14,3		747,75	+16,8		746,84	+17,2		750,35	+11,4		+18,2	+ 6,7	Beau..................	S. S. O.
24	751,87	+11,0		751,48	+16,5		751,87	+18,1		751,13	+11,6		+18,8	+ 7,0	Très nuageux..........	S. S. O.
25	753,17	+15,2		754,00	+17,4		755,14	+18,0		757,12	+14,8		+19,0	+ 9,2	Nuageux..............	S. O.
26	762,53	+18,4		762,06	+21,6		761,49	+21,7		761,06	+16,0		+22,9	+11,5	Nuageux..............	S.
27	759,98	+19,6		759,44	+23,1		758,80	+24,9		758,74	+21,4		+26,1	+11,5	Beau..................	S.
28	759,17	+22,2		758,24	+25,4		757,30	+26,2		757,65	+21,5		+28,2	+13,1	Beau..................	S. E.
29	758,33	+22,8		757,67	+27,2		756,94	+28,4		761,12	+21,6		+29,2	+13,0	Beau..................	N. O.
30	757,75	+17,1		756,77	+21,6		756,66	+26,4		757,69	+18,9		+27,0	+15,2	Beau..................	N. N. E.
1	750,23	+ 6,1		750,43	+ 9,6		749,93	+10,5		750,70	+ 6,8		+11,3	+ 3,7	... Moy. du 1er au 10	Pluie en centim.,
2	755,78	+ 8,0		755,20	+ 9,5		754,90	+10,3		755,32	+ 7,3		+11,3	+ 4,2	... Moy. du 11 au 20	Cour. 3,928
3	754,56	+16,1		754,13	+19,6		753,86	+20,8		754,91	+15,9		+21,9	+10,2	... Moy. du 21 au 30	Terr.. 3,395
	753,52	+10,1		753,26	+12,9		752,90	+13,9		753,65	+10,0		+14,8	+ 6,0	.... Moyennes du mois....	+10,4